

DENGELEME HESABI-I

DERS NOTLARI

Ağırlıkları Eşit Dolaysız (Direkt) Ölçüler Dengelemesi

Prof. Dr. Mualla YALÇINKAYA

Doç. Dr. Emine TANIR KAYIKÇI

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Harita Mühendisliği Bölümü

Dolaysız (Direkt) Ölçüler Dengelemesi

Aranan büyüklüğün **doğrudan (direkt)** ölçüldüğü durumlarda elde edilen gözlemler, **dolaysız (direkt) ölçüler yöntemi** ile dengelenir.

Matematik Model

(Fonksiyonel Model + Stokastik Model)

Stokastik Model:

Dolaysız ölçüler dengelemesi, ölçülerin duyarlılıkları ve korelasyonları konusunda elde edilen bilgilere göre (stokastik model) üç farklı biçimde uygulanır;

- **Ağırlıkları Eşit Dolaysız Ölçülerin Dengelemesi**
- **Ağırlıkları Farklı Dolaysız Ölçülerin Dengelemesi**
- **Duyarlılıkları Farklı ve Korelasyonlu Dolaysız Ölçülerin Dengelenmesi**

**Ağırlıkları Eşit Dolaysız (Direkt) Ölçüler
Dengelemesi
(Aritmetik Ortalama)**

Stokastik Model:

$$p_i = 1$$

$$\begin{array}{rcl} p_1 & = & 1 \\ p_2 & = & 1 \\ \vdots & & \\ p_n & = & 1 \end{array}$$

Aranan büyüklüğün belirlenmesi için, n sayıda, duyarlıkları eşit, ilk bağımsız gözlemler yapılmış olsun. Duyarlıkları eşit gözlemlerin ağırlıkları birbirine eşit ve $(p_i = 1)$ olur.

Fonksiyonel Model:

Ölçü + Düzeltmesi = Kesin değer

$$L_i + v_i = x$$

Ölçüler

L_1
L_2
$\vdots$
L_n

Düzeltmeler

v_1
v_2
$\vdots$
v_n

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ (n , ölçü sayısı)

$$L_i + v_i = x \quad \Rightarrow \quad v_i = x - L_i$$

Düzeltilme Denklemleri

$$\begin{aligned} v_1 &= x - L_1 \\ v_2 &= x - L_2 \\ &\vdots \\ v_n &= x - L_n \end{aligned}$$

Amaç Fonksiyonu

$$[vv] = \min$$

En Küçük Kareler Yöntemi (EKK)
Amaç Fonksiyonu

$$\begin{aligned} v_1 &= x - L_1 \\ v_2 &= x - L_2 \\ &\vdots \\ v_n &= x - L_n \end{aligned}$$

$$[vv] = nx^2 - 2x[L] + [LL]$$

Amaç Fonksiyonu

$$[vv] = nx^2 - 2x[L] + [LL]$$

EKK yöntemine göre amaç fonksiyonu minimum olması için $[vv]$ bilinmeyenlere (x) göre birinci türevi (0) olmalıdır.

$$\frac{\partial [vv]}{\partial x} = 2nx - 2[l] = 0$$

$$2nx - 2[L] = 0$$



$$nx - [L] = 0$$

Normal Denklem



$$x = \frac{[L]}{n}$$

Kesin Değer

Sonuç olarak; ağırlıkları eşit ilk bağımsız ölçülerin En Küçük Kareler (EKK) İlkesine göre dengelenmesi sonucunda elde edilen kesin değer, gözlemlerin aritmetik ortalamasıdır.

Küçük sayılarla çalışıp kolaylığı sağlamak amacıyla bilinmeyen x , bilinmeyenin yaklaşık değeri x_0 ve dengeleme bilinmeyeni dx olarak iki bileşene ayrılır.

$$x = x_0 + dx$$

Kesin Değer

$$x_0$$

Bilinmeyenin Yaklaşık Değeri

$$dx$$

Dengeleme Bilinmeyeni

Düzeltilme Denklemleri

$$v_i = x - L_i$$

$$v_i = x_0 + dx - L_i$$

$$v_i = dx - (L_i - x_0)$$

$$v_1 = dx - (L_1 - x_0)$$

$$v_2 = dx - (L_2 - x_0)$$

$$\vdots$$

$$v_n = dx - (L_n - x_0)$$

Ötelenmiş ölçüler

$$l_i = (L_i - x_0)$$



$$v_i = dx - l_i$$

$$v_1 = dx - l_1$$

$$v_2 = dx - l_2$$

$$\vdots$$

$$v_n = dx - l_n$$

$$dx = \frac{[l]}{n}$$

Dengeleme Bilinmeyeni

$$x = x_0 + dx$$

Kesin Değer (Aritmetik Ortalama)

$$\begin{aligned}v_1 &= dx - l_1 \\v_2 &= dx - l_2 \\&\vdots \\v_n &= dx - l_n\end{aligned}$$

Düzeltilmeler

Denetim İşlemleri

1. Düzeltmelerin Toplamı $[v]$ Kontrolü

$$\begin{aligned}v_1 &= dx - l_1 \\v_2 &= dx - l_2 \\&\vdots \\v_n &= dx - l_n\end{aligned}$$

$$[v] = ndx - [l]$$

$$[v] = n \frac{[l]}{n} - [l]$$

dx yerine yazılırsa;

$$dx = \frac{[l]}{n}$$

$$[v] = 0$$

Denetim 1

Düzeltmelerin Toplam Kontrolü

Denetim İşlemleri

2. Düzeltmelerin Kareleri Toplamı $[vv]$ Kontrolü

$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} v_1 = dx - l_1 \\ v_2 = dx - l_2 \\ \vdots \\ v_n = dx - l_n \end{matrix}$$

Düzeltme denklemlerinin her iki tarafı v_i ile çarpılıp toplanırsa

$$[vv] = dx [v] - [vl]$$

$$[v] = 0$$

$$[vv] = -[vl]$$

Denetim 2

Denetim İşlemleri

2. Düzeltmelerin Kareleri Toplamı $[vv]$ Kontrolü

$$[vv] = -[vl]$$

$-l_1$	$v_1 = dx - l_1$
$-l_2$	$v_2 = dx - l_2$
$\vdots$	$\vdots$
$-l_n$	$v_n = dx - l_n$

Düzeltilme denklemlerinin her iki tarafı $(-l_i)$ ile çarpılıp toplanırsa

$$-[vl] = -dx[l] + [ll]$$

$$[vv] = [ll] - dx[l]$$

Denetim 3

Denetim İşlemleri

2. Düzeltmelerin Kareleri Toplamı $[vv]$ Kontrolü

$$[vv] = [ll] - dx[l]$$

dx yerine $\frac{[l]}{n}$ yazılarak

$$[vv] = [ll] - \frac{[l]^2}{n}$$

Denetim 4

Denetim İşlemleri

SONUÇ DENETİMİ

ÖLÇÜ + DÜZELTMESİ = KESİN DEĞER

$$L_i + v_i = x$$

?

Duyarlık Hesapları

**Gözlemlerin
Ortalama Hatası**

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

**Kesin Değerin
Ortalama Hatası**

$$m_x = \pm \frac{m_0}{\sqrt{n}}$$

Uygulama 1

Ülke nirengi ağının II. Derece noktalarından birindeki bir açı aynı gün, aynı aletle, aynı ölçme aynı ölçmeçi tarafından 12 kez gözlenmiş ve aşağıdaki değerler bulunmuştur. Açının kesin değerini, bir ölçünün ortalama hatasını ve kesin değerin ortalama hatasını hesaplayınız.

Ölçüler L (g)	Ötelenmiş Ölçüler (l) (cc)
67.46188	0.8
67.46187	0.7
67.46190	1.0
67.46195	1.5
67.46195	1.5
67.46182	0.2
67.46193	1.3
67.46197	1.7
67.46192	1.2
67.46198	1.8
67.46209	2.9
67.46204	2.4

1. Yaklaşık değerin seçimi

$$x = x_0 + dx$$

$$x_0 = 67.46180^g$$

2. Ötelenmiş ölçülerin hesabı

$$l_i = (L_i - x_0)$$

3. Dengeleme bilinmeyeninin hesabı

$$dx = \frac{[l]}{n}$$

$$dx = \frac{17.00}{12} = 1.42^{cc}$$

4. Kesin değerin hesabı

$$x = x_0 + dx$$

$$x = x_0 + dx = 67.46180^g + 1.42^{cc}$$
$$x = 67.46194^g$$

Uygulama 1

Ötelenmiş Ölçüler (l) (cc)	Düzeltilme v (cc)
0.8	0.62
0.7	0.72
1.0	0.42
1.5	-0.08
1.5	-0.08
0.2	1.22
1.3	0.12
1.7	-0.28
1.2	0.22
1.8	-0.38
2.9	-1.48
2.4	-0.98

5. Düzeltmelerin hesabı

$$v_i = dx - l_i$$

6. Denetim İşlemleri

1. Düzeltmelerin Toplamı $[v]$ Kontrolü

$$[v] = 0.04 \sim 0$$

Denetim 1

2. Düzeltmelerin Kareleri Toplamı $[vv]$ Kontrolü

$$[vv] = 6.02$$

$$[vv] = -[vl]$$

$$[vv] = 5.96$$

Denetim 2

$$[vv] = [ll] - dx[l]$$

$$[vv] = 30.10 - 24.14 = 5.96$$

Denetim 3

$$[vv] = [ll] - \frac{[l]^2}{n}$$

$$[vv] = 30.10 - \frac{289}{12} = 6.02$$

Denetim 4

Uygulama 1

7. Duyarlık hesapları

Düzeltilme
 v (cc)

0.62

0.72

0.42

-0.08

-0.08

1.22

0.12

-0.28

0.22

-0.38

-1.48

-0.98

Bir Ölçünün Ortalama Hatası

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{6.02}{11}} = \pm 0.74^{cc}$$

Kesin Değerin Ortalama Hatası

$$m_x = \pm \frac{m_0}{\sqrt{n}}$$

$$m_x = \pm \frac{0.74}{\sqrt{12}} = \pm 0.21^{cc}$$

8. Sonuç denetimi

ÖLÇÜ + DÜZELTMESİ = KESİN DEĞER

$$L_i + v_i = x$$

Ölçüler L (g)	Düzeltilme v (cc)	Kesin Değer x (g)
67.46188	0.62	67.461942
67.46187	0.72	67.461942
67.46190	0.42	67.461942
67.46195	-0.08	67.461942
67.46195	-0.08	67.461942
67.46182	1.22	67.461942
67.46193	0.12	67.461942
67.46197	-0.28	67.461942
67.46192	0.22	67.461942
67.46198	-0.38	67.461942
67.46209	-1.48	67.461942
67.46204	-0.98	67.461942

Ağırlıkları Eşit Dolaysız Ölçüler Dengelemesi
MATRİS GÖSTERİMİ

Stokastik Model:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = E$$

Stokastik Model
(Ağırlık Matrisi)

E: Birim matris

Fonksiyonel Model:

Düzeltilme Denklemi

$$\begin{aligned}v_1 &= dx - l_1 \\v_2 &= dx - l_2 \\&\vdots \\v_n &= dx - l_n\end{aligned}$$

$$V = e \, dx - l$$

Fonksiyonel Model
(Düzeltilme Denklemi)

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Düzeltilme vektörü

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bir vektörü

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

Ötelenmiş ölçü vektörü

$$V = e \, dx - l$$

Fonksiyonel Model
(Düzeltilme Denklemi)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = E$$

Stokastik Model
(Ağırlık Matrisi)

$$V^T V = \min.$$

EKK Amaç Fonksiyonu

$$V = e \, dx - l$$

$$V^T V = \min.$$

$$V^T V = e^T e \, dx^2 - 2e^T l \, dx + l^T l$$

$$\frac{\partial(V^T V)}{\partial dx} = 2 e^T e \, dx - 2e^T l = 0$$

$$e^T e \, dx - e^T l = 0$$

Normal Denklemler

$$dx = \frac{e^T l}{e^T e}$$

Dengeleme bilinmeyeni

$$x = x_0 + dx$$

Kesin Değer (Aritmetik Ortalama)

$$V = e \, dx - l$$

Düzeltilmeler

Denetim İşlemleri

1- $e^T V$ Denetimi

$$V = e \, dx - l$$

$$e^T V = e^T e \, dx - e^T l$$

$$e^T V = e^T e \frac{e^T l}{e^T e} - e^T l$$

$$dx = \frac{e^T l}{e^T e}$$


$$e^T V = 0$$

$$V^T e = 0$$

Denetim 1

Denetim İşlemleri

2- $V^T V$ Denetimi

$$V = e \, dx - l$$

$$V^T V = V^T e \, dx - V^T l$$

$$V^T e = 0$$


$$V^T V = - V^T l$$

$$V^T V = - l^T V$$

Denetim 2

Denetim İşlemleri

2- $V^T V$ Denetimi

$$V = e \, dx - l$$

$$-l^T V = -l^T e \, dx + l^T l$$

$$V^T V = - \, l^T V = l^T l - l^T e \, dx$$

$$V^T V = - \, V^T l = l^T l - dx \, e^T l$$

Denetim 3

Denetim İşlemleri

2- $V^T V$ Denetimi

$$V^T V = - \quad V^T l = \quad l^T l - dx \, e^T l$$

$$V^T V = - \quad V^T l = \quad l^T l - \frac{e^T l}{e^T e} e^T l$$

$$dx = \frac{e^T l}{e^T e}$$

$$V^T V = - \quad V^T l = \quad l^T l - \frac{(e^T l)^2}{e^T e}$$

Denetim 4

Duyarlık Hesabı

Ölçülerin ortalama hatası

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{V^T V}{n - 1}}$$

Kesin Değerin Ortalama Hatası

$$m_x = \pm \frac{m_0}{\sqrt{n}}$$

Ağırlıkları Eşit Dolaysız Ölçüler Dengelemesi MATRİS GÖSTERİMİ

Duyarlık hesapları

Düzeltilmelerin Ortalama Hatası

$$V = e \, dx - l$$

$$V = e \frac{e^T l}{e^T e} - l$$

$$V = \left(\frac{e e^T}{e^T e} - E \right) l$$

$$dV = \left(\frac{e e^T}{e^T e} - E \right) dl$$

$$Q_{vv} = \left(\frac{e e^T}{e^T e} - E \right) \left(\frac{e e^T}{e^T e} - E \right)^T$$

$$Q_{vv} = \left(\frac{e e^T}{e^T e} - E \right) \left(\frac{e e^T}{e^T e} - E \right)$$

$$Q_{vv} = \frac{e e^T e e^T}{e^T e e^T e} - \frac{e e^T}{e^T e} - \frac{e e^T}{e^T e} + E$$

$$Q_{vv} = \frac{e e^T}{e^T e} - \frac{e e^T}{e^T e} - \frac{e e^T}{e^T e} + E$$

$$Q_{vv} = E - \frac{e e^T}{e^T e}$$

$$m_{vi} = \pm m_0 \sqrt{q_{vivi}}$$

$$Q_{ll} = E$$