

# İÇ ÇARPIM ve GEOMETRİK UYGULAMALARI

Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler

6.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2021

# Öklid İç Çarpımı

## Örnek

$\mathbb{R}^3$  de  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$  olmak üzere

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

şeklinde tanımlanan çarpımın bir iç çarpım olduğunu gösteriniz.

## Tanım

$\mathbb{R}^n$  uzayında,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vektörleri için

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon, bir iç çarpımdır ve bu iç çarpıma özel olarak **Öklid İç Çarpımı** denir. Öklid iç çarpımını genel olarak  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$  şeklinde gösteririz.

### Örnek

$\mathbb{R}^4$  uzayında verilen  $\vec{x} = (1, 2, 3, 4)$  ve  $\vec{y} = (2, 1, -3, 1)$  vektörleri için  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$  iç çarpımını hesaplayınız.



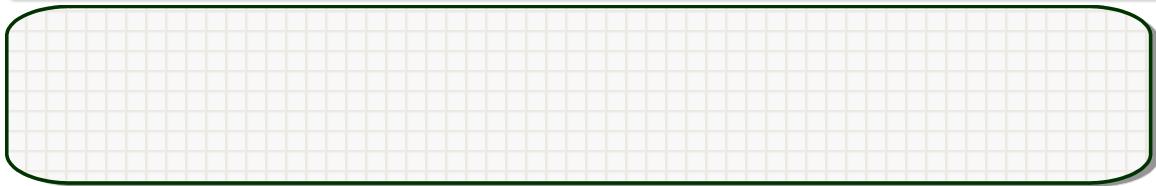
## Çözüm

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 = -1$$

bulunur.

## Problem

$\mathbb{R}^5$  uzayında verilen  $\vec{x} = (0, 1, 2, 3, 4)$  ve  $\vec{y} = (2, 1, -3, 1, 5)$  vektörleri için  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$  iç çarpımını hesaplayınız.



## Örnek

$\mathbb{R}^3$  uzayında verilen  $\vec{x} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{y} = (0, 1, 2)$ ,  $\vec{z} = (2, 4, -3)$  vektörleri için aşağıdakileri hesaplayınız.

a)  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = ?$  b)  $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = ?$  c)  $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = ?$  d)  $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = ?$  e)  $\langle \vec{x} + \vec{z}, \vec{x} + \vec{z} \rangle = ?$

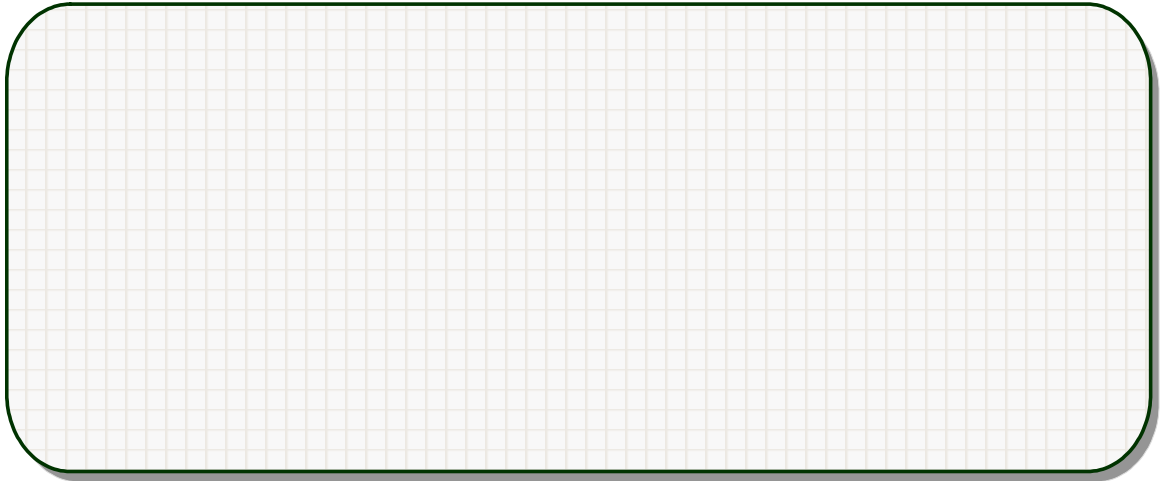
## Problem

$\mathbb{R}^4$  uzayında verilen  $\vec{x} = (1, 2, 3, 4)$ ,  $\vec{y} = (0, 3, 1, 2)$  ve  $\vec{z} = (1, 0, 2, -1)$  vektörleri için aşağıdakileri hesaplayınız.

a)  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = ?$  b)  $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = ?$  c)  $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = ?$  d)  $\langle \vec{x} + 3\vec{z}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = ?$

## Örnek

$\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$ ,  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = 1$  ise  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$  değerini hesaplayınız.



# Norm ve İç Çarpım Arasındaki İlişki

Daha önce  $\mathbb{R}^n$  uzayında bir  $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  vektörünün uzunluğunu

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

ile ifade etmiştik. Diğer taraftan,  $\vec{\mathbf{u}}$  vektörünün kendisiyle iç çarpımı da,

$$\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$$

olduğundan,

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle}$$

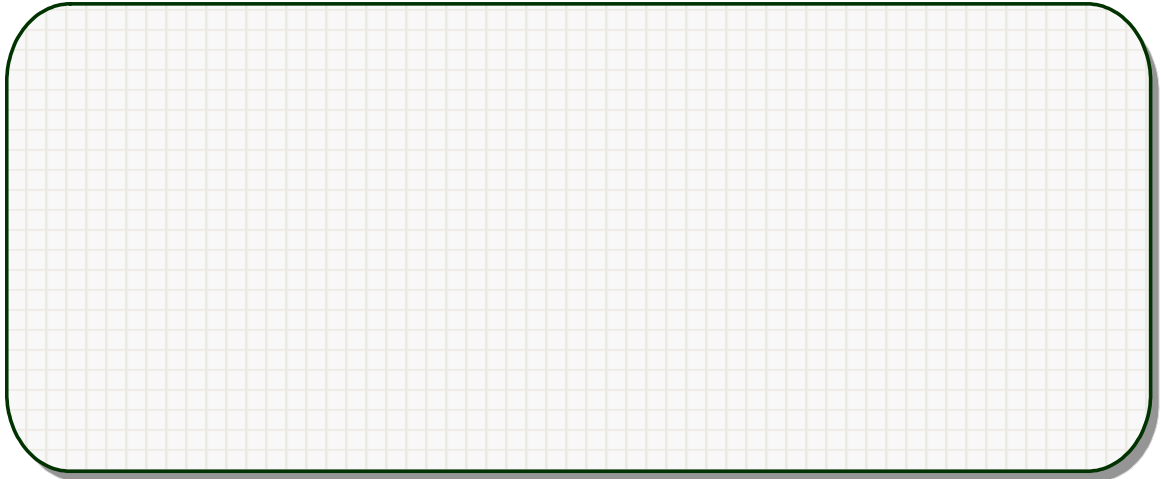
sonucu elde edilir.

## Teorem

$\vec{x}$  ve  $\vec{y}$ ,  $\mathbb{R}^n$  uzayında iki vektör olsun.  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  arasındaki açı  $\theta$  ise,  $\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$  eşitliği sağlanır.

## Örnek

$\vec{x} = (1, 2, 3, 4, 5)$  vektörüyle  $\vec{y} = (2, -3, 5, 1, k)$  vektörü birbirine dik ise  $k$  nedir?



### Çözüm

$\vec{x} \perp \vec{y}$  ise  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$  olmalıdır. Buna göre,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot k = 5k + 15 = 0$$

eşitliğinden,  $k = -3$  bulunur.

## Örnek

$\vec{x} = (1, 3, 0, 2)$  ve  $\vec{y} = (1, 0, 2, 3)$  vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.



### Çözüm

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{\sqrt{1 + 9 + 4} \sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{1}{2} \quad \text{olduğundan, } \theta = 60^\circ \text{ elde edilir.}$$

## Problem

$\vec{x} = (1, 2, 3, 2, 1)$  ve  $\vec{y} = (3, 1, 2, 1, 2)$  vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.



## Problem

$\vec{x} = (1, 2, -3, 2, -1)$  ve  $\vec{y} = (3, k, 2, 1, 2)$  vektörleri birbirine dik ise  $k = ?$



## Problem

$\mathbb{R}^3$  uzayında  $\vec{x} = (1, 2, 3)$  vektörüne dik olan 5 vektör yazınız.



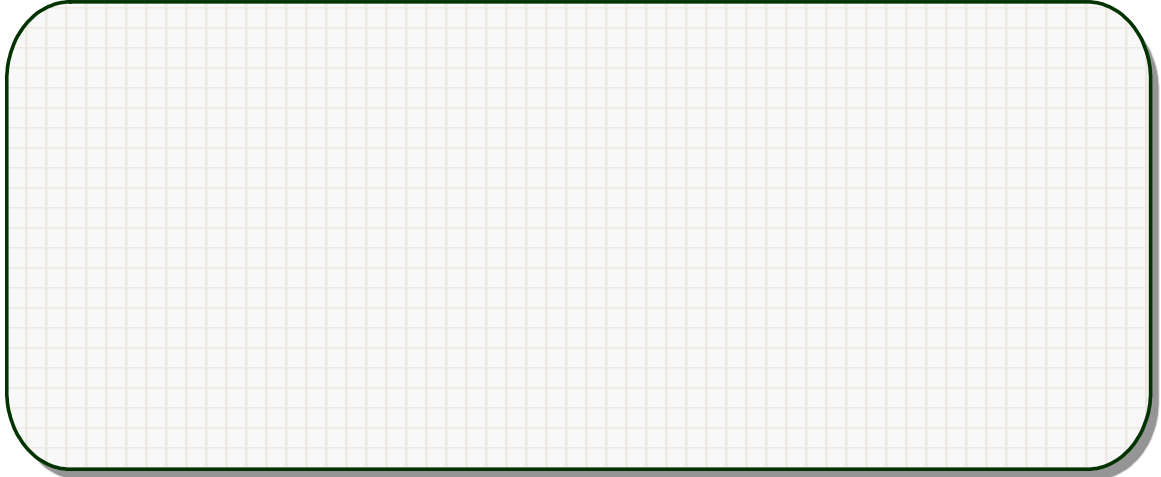
## Problem

$\mathbb{R}^3$  uzayında  $\vec{x} = (1, k, 2)$ ,  $\vec{y} = (3, -1, m)$  ve  $\vec{z} = (n, 2, 2)$  vektörleri ikişer olarak birbirlerine dik olduklarına göre,  $m, n$  ve  $k$  değerlerini bulunuz.



## Örnek

$\vec{x} = (1, 2, 3)$  vektörüyle aynı düzlemde bulunan birbirine dik iki vektör bulunuz.



# Öklid İç Çarpımını Kullanarak Düzlem Denkleminin İfade Edilmesi

Bunun için düzleme **dik olan bir vektörü** kullanacağız. Düzleme dik olan bir vektör, düzlem üzerindeki tüm vektörlere diktir. Buna göre, düzlemin  $P$  gibi bir noktasını ve düzlemin dik olduğu  $\vec{N}$  gibi bir vektörü biliyorsak düzlem denklemini kolayca bulabiliriz.  $X(x, y, z)$  düzlemin değişken noktasını göstermek üzere,  $\vec{PX}$  vektörü daima,  $\vec{N}$  vektörüne diktir. O halde,

$$\langle \vec{PX}, \vec{N} \rangle = 0$$

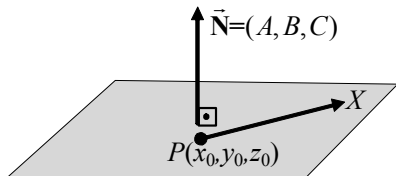
eşitliği sağlanmalıdır.  $P(x_0, y_0, z_0)$  ve  $\vec{N} = (A, B, C)$  olmak üzere,

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (A, B, C) \rangle = 0$$

eşitliğinden,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

elde edilir.



## Örnek

$\vec{x} = (1, 2, 3)$  ve  $\vec{y} = (2, k, 3)$  vektörlerinin içinde bulunduğu düzlem,  $\vec{N} = (2, 3, m)$  vektörüne dik ise,  $k$  ve  $m$  değerlerini bulunuz.

## Problem

$\vec{x} = (1, 2)$  ve  $\vec{y} = (2, 1)$  vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.





Mustafa Özdemir, Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınları, 6. Baskı, İzmir, 2021.

