

MAT3024 HAREKET GEOMETRİSİNE GİRİŞ Ara Sınav, 16.04.2024, saat: 08.00		DEĞERLENDİRME	
		1	
		2	
Öğrenci No:		3	
Adı Soyadı:		4	
İmza:		5	

SORULAR

- 1) $D = \{x + \varepsilon y : x, y \in R, \varepsilon^2 = 0\}$ dual sayılar kümesinde $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*, B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in D$ olmak üzere $\bar{a} = \{A_1, A_2\}$, $\bar{b} = \{B_1, B_2\}$ nokta sistemleri için aşağıdaki durumlarda $\bar{a}$ nın $\bar{b}$ ye D_1 -denk olmadığını gösteriniz.
i) $a_2 = 0, b_2 \neq 0$, ii) $a_1 = 0, b_1 = 0, a_1^* \neq 0, b_1^* \neq 0, a_2 = 0, b_2 = 0, a_2^* \neq 0, b_2^* = 0$.
- 2) $P = x + \varepsilon y, x \neq 0, Q = u + \varepsilon v; x, y, u, v \in R$ olmak üzere $f: D^2 \rightarrow D; f(P, Q) = \frac{Q}{P}$ ile tanımlı fonksiyonun, $f(P, Q) = \frac{Q}{P} = f_1(P, Q) + \varepsilon f_2(P, Q)$ biçiminde yazılmasını sağlayan $f_1, f_2: D^2 \rightarrow R$ fonksiyonlarını belirleyiniz ve f nin D_1 grubuna göre invaryant olduğunu gösteriniz.
- 3) Dual düzlemde, köşeleri; $A = -1, B = \varepsilon(-3), C = 1, D = \varepsilon 3$ noktalarında bulunan dörtgeni ve bu dörtgenin $H = -2 + \varepsilon: D \rightarrow D$ dönüşümü altındaki görüntüsünü çiziniz. Buna göre paralelliğin, uzunluk ve açı büyüklüklerinin invaryant kalıp kalmadığını gözlemleyiniz.
- 4) Dual düzlemde köşeleri, $A_1 = 1 - \varepsilon, A_2 = 2, A_3 = 3 - \varepsilon, A_4 = 2 - \varepsilon 2$ noktalarında bulunan kare ile köşeleri $B_1 = x + \varepsilon t, B_2 = y + \varepsilon u, B_3 = 6 + \varepsilon, B_4 = z + \varepsilon v$ noktalarında bulunan dörtgeninin, $D_1 = \{h + \varepsilon h^* : h, h^* \in R, h \neq 0\}$ grubuna göre denk olması için $x, y, z, t, u, v \in R$ ne olmalıdır?
- 5) $G = MD_1 = \left\{ \begin{pmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{pmatrix}, h \neq 0, h, h^* \in R \right\}$ grubu için $A = \varepsilon(-2)$ elemanının G_A yörüngesini belirleyiniz.

Süre 90 dakikadır,
BAŞARILAR

CEVAPLAR

1) Bir $H = h + \varepsilon h^*$, $h \neq 0$ için $B_1 = H A_1$, $B_2 = H A_2$ olmalı.
 $b_1 + \varepsilon b_1^* = (h + \varepsilon h^*)(a_1 + \varepsilon a_1^*)$, $b_2 + \varepsilon b_2^* = (h + \varepsilon h^*)(a_2 + \varepsilon a_2^*)$
 $= h a_1 + \varepsilon (h a_1^* + h^* a_1)$ $= h a_2 + \varepsilon (h a_2^* + h^* a_2)$ (*)
 i) $a_2 = 0$, $b_2 \neq 0$
 (*) dan $b_2 = h \cdot 0 = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Yani $B_2 \neq H A_2$ dir.
 bu durumda $\bar{a}$, $\bar{b}$ ye D_1 -denk değildir.

ii) $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = b_2^* = 0 \Rightarrow A_1 = \varepsilon a_1^*$, $B_1 = \varepsilon b_1^*$, $A_2 = \varepsilon a_2^*$, $B_2 = 0$

(*) dan $0 = h a_2$, $0 = h a_2^* + h^* a_2$ $(h \neq 0, a_2^* \neq 0 \Rightarrow h a_2^* \neq 0 \text{ dir.})$
 $\checkmark (a_2 = 0)$ $\neq 0 = 0$
 $\times$ çelişkidir.

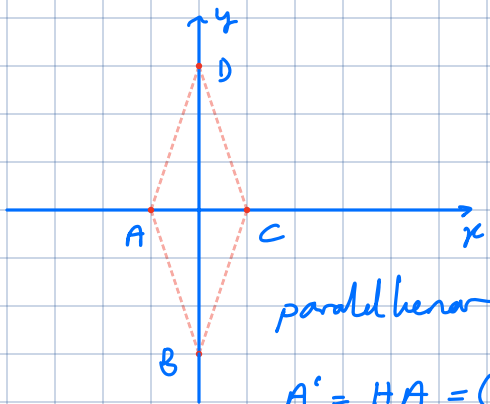
0 halde $B_2 \neq H A_2$ olduğundan $\bar{a}$, $\bar{b}$ ye denk değildir.

2) $f(P, Q) = \frac{Q}{P} = \frac{(u + \varepsilon v)(x - \varepsilon y)}{(x + \varepsilon y)(x - \varepsilon y)} = \frac{ux + \varepsilon(vx - uy)}{x^2} = \frac{u}{x} + \varepsilon \frac{vx - uy}{x^2}$
 $= f_1(P, Q) + \varepsilon f_2(P, Q) \Rightarrow$

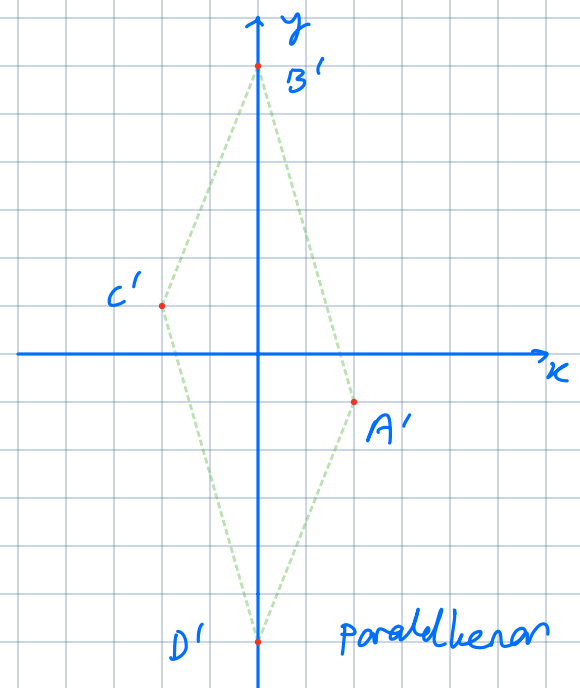
$f_1(P, Q) = \frac{u}{x}$, $f_2(P, Q) = \frac{vx - uy}{x^2}$ olur.

Bir $H \in D_1$ için $f(HP, HQ) = \frac{HQ}{HP} = \frac{Q}{P} = f(P, Q)$ olduğundan
 f D_1 -invarianttir.

3)



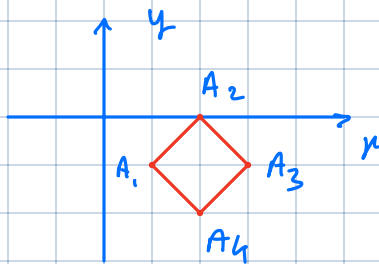
$$\begin{aligned} A' &= HA = (-2 + \varepsilon)(-1) = 2 - \varepsilon \\ B' &= HB = (-2 + \varepsilon)(-3\varepsilon) = 6\varepsilon \\ C' &= HC = (-2 + \varepsilon) \cdot 1 = -2 + \varepsilon \\ D' &= HD = (-2 + \varepsilon)(3\varepsilon) = -6\varepsilon \end{aligned}$$



✓ Paralellik korunur.

✓ uzunluklar ve açılar korunmaz.

4)



$$\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \stackrel{D}{\sim} \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$$

$B_1 = HA_1$, $B_2 = HA_2$, $B_3 = HA_3$, $B_4 = HA_4$
 olarak seçilse bir $H = h + \varepsilon h^* \in D$, vardır.

$$B_3 = 6 + \varepsilon = (h + \varepsilon h^*)(3 - \varepsilon) = 3h + \varepsilon(3h^* - h) \Rightarrow$$

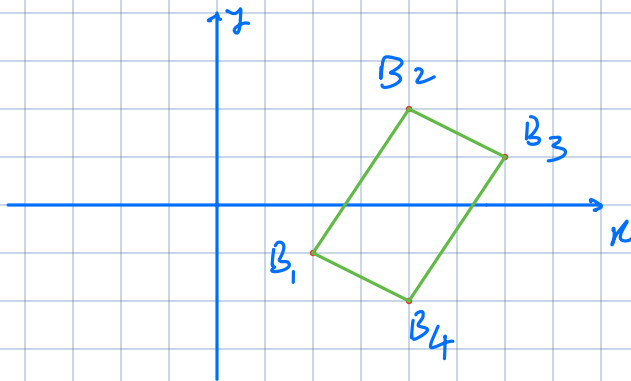
$$3h = 6, \quad 3h^* - h = 1$$

$$h = 2, \quad h^* = \frac{1}{3}(1 + 2) = 1 \Rightarrow \underline{H = 2 + \varepsilon}$$

$$B_1 = x + \varepsilon t = (2 + \varepsilon)(1 - \varepsilon) = 2 + \varepsilon(1 - 2) = \underline{2 - \varepsilon} \Rightarrow x = 2, \quad t = -1$$

$$B_2 = y + \varepsilon u = (2 + \varepsilon)(2) = \underline{4 + 2\varepsilon} \Rightarrow y = 4, \quad u = 2$$

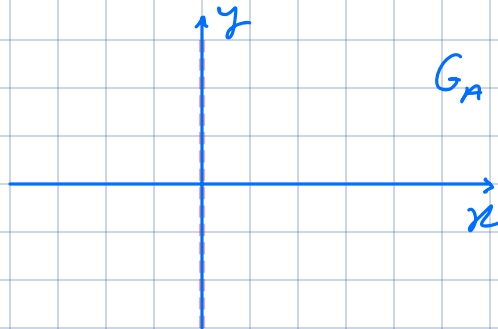
$$B_4 = z + \varepsilon v = (2 + \varepsilon)(2 - 2\varepsilon) = 4 + \varepsilon(2 - 4) = \underline{4 - 2\varepsilon} \Rightarrow z = 4, \quad v = -2$$



5)

$$A = \varepsilon(-2) \rightarrow (0, -2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$G_A = \left\{ \begin{pmatrix} h & 0 \\ h & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R}, h \neq 0 \right\} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ de ki tüm } (0, -2h) \text{ noktaları}$$



G_A : orijin hariç y-ekseninin
tüm noktalarını içerir.