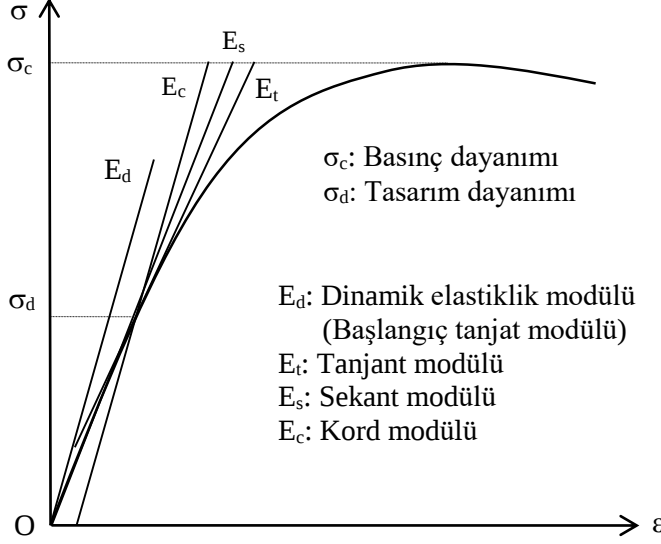


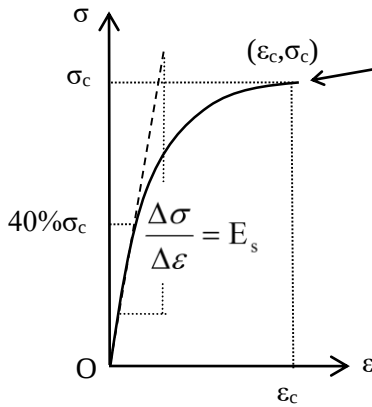
BETON İÇİN GERİLME-ŞEKİLDEĞİŞTİRME (σ - ϵ) DİYAGRAMI

Betonun gerilme-şekildeğiştirme eğrisinde doğrusal kısım yoktur. Bu nedenle yumuşak çelik için yapılanın aksine beton için tek bir elastiklik modülü tanımlamak mümkün değildir. Beton için tipik gerilme-şekildeğiştirme eğrisi aşağıda verilmektedir.



Beton için tipik gerilme-deformasyon (σ - ϵ) eğrisi ve tanımlanan elastisite modülleri

Şekilden görüldüğü üzere beton için dört farklı elastiklik modülü tanımlanmaktadır. İsmen bunlar dinamik elastiklik modülü (başlangıç tanjant modülü), tanjant modülü, sekant modülü ve kord modülüdür. Dinamik elastiklik modülü orijinde (σ - ϵ) eğrisine çizilen teğetin eğimi, tanjant modülü nihai dayanımın %40 değerine karşılık gelen noktada (σ - ϵ) eğrisine çizilen teğetin eğimi, sekant modülü genellikle nihai dayanımın %40 değerine karşılık gelen noktayı orijine birleştiren doğrunun eğimi olarak tanımlanır. Kord modülü eğri üzerinde nihai dayanımın %40 değerine karşılık gelen noktayı apsis üzerinde 50×10^{-6} kadar bir boyuna şekil değiştirmeye karşılık gelen noktaya birleştiren doğrunun eğimidir. Bu modülü belirlemede apsis üzerinde 50 mikrometrelik ötelemeyi esas almanın nedeni gerilme-şekildeğiştirme eğrisinde sünme ve rötreye bağlı olarak başlangıçta meydana gelen konkavlığı elimine etmek içindir. Beton için elastiklik modülü olarak genellikle sekant modülü kullanılmaktadır.



Parabolik eğrinin genel matematiksel ifadesi $\sigma = a + b \epsilon + c \epsilon^2$ şeklindedir.

$$\sigma = \sigma_c \times \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \left(2 - \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right) \quad \text{Voellmy parabolü}$$

$$\sigma = \sigma_c \times \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \times e^{\left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)} \quad \text{Smith - Young eğrisi}$$

σ_c ve ε_c betona ait gerilme-şekildeğiştirme eğrisinin temel iki karakteristiğidir. Beton için ε_c genellikle $(0.8 - 2.0) \times 10^{-3}$ arasında değerler alır. $(\sigma - \varepsilon)$ eğrisinin maksimum noktadan sonraki kısmının pratik olarak anlamı yoktur. Metallerin aksine, betonun $(\sigma - \varepsilon)$ eğrisinde lineer kısım yoktur ancak genellikle nihai dayanımın %40 değerine karşılık gelen noktayı orijine birleştiren doğrunun eğimi betonun elastiklik modülü (sekant modülü) olarak kabul edilir.

Betonarme hesapları için betona ait gerilme-şekildeğiştirme eğrisinin matematiksel ifadesi bilinmelidir. Bu konuda yapılan pek çok deneysel çalışma sonunda beton için Voellmy parabolü ve Smith-Young eğrisi olmak üzere iki ilişki belirlenmiştir. Smith-Young eğrisi deney sonuçlarıyla daha uyumlu olmasına rağmen kullanımı pratik değildir. Bu bakımdan Voellmy parabolü daha yaygın olarak kullanılmaktadır. Voellmy parabolü betonun nihai dayanımı σ_c değerine kadar geçerlidir. σ_c ve ε_c değerleri bilinmesi durumunda her iki eğri de tanımlıdır.

Dinamik elastiklik modülünün (Başlangıç tanjant modülü) belirlenmesi:

Voellmy parabolü:

$$\sigma = \sigma_c \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_d \quad E_d = \frac{2 \sigma_c}{\varepsilon_c} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Smith-Young eğrisi:

$$\sigma = \sigma_c \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \times e^{\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)} \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_d \quad E_d = \frac{e}{\varepsilon_c} \times \sigma_c \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

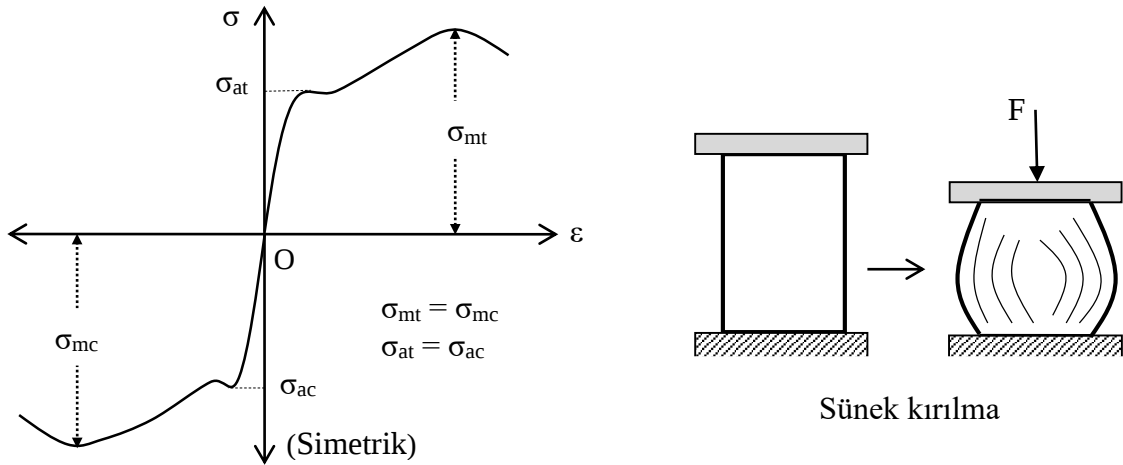
Beton için kırılma işi:

Beton için gerilme-şekildeğiştirme diyagramı parabol kabul edilerek, kırılma işi aşağıdaki ifade kullanılarak hesaplanabilir.

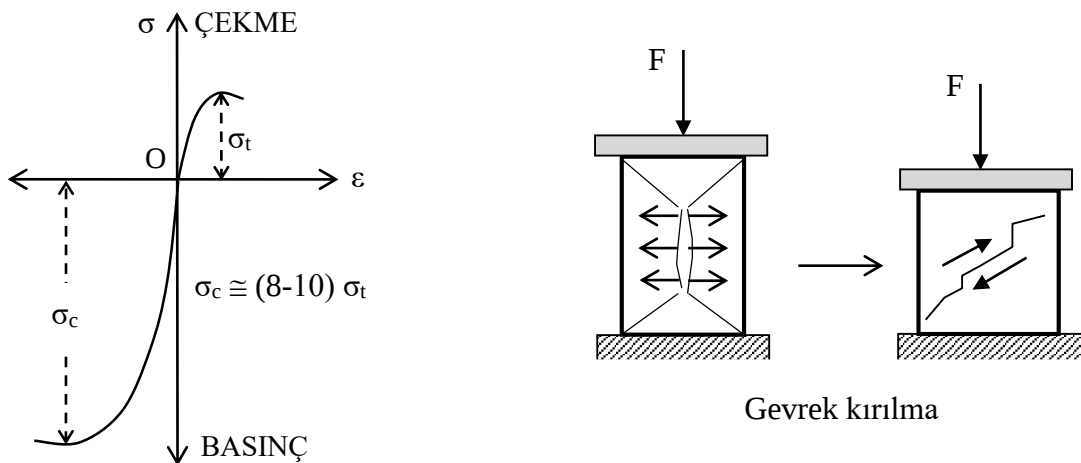
$$W_k = \frac{2}{3} \times \sigma_c \times \varepsilon_c \quad \text{Burada } \varepsilon_c \text{ betonun basınç dayanımı } \sigma_c \text{ 'ye karşılık gelen kırılma-kısalma oranıdır.}$$

BETONUN BASINÇ ALTINDA DAVRANIŞI

İzotrop sünek malzemelerin basınç altında davranışı çekmedekine benzer. Gerçekte akma olayı maksimum kayma gerilmesi etkisinde oluşur. Eksenel yüklemede maksimum kayma gerilmeleri eksenle 45° açı yapan düzlemler boyunca etkir. Eksenel gerilmenin yönü ne olursa olsun bu ilişki değişmez; akma aynı gerilme sınırında oluşur. Akmadan sonra numunenin orta kısmı belirgin olarak genişler, uçlar sürtünme etkisiyle dar kalır, sonuçta numune fiçi biçimini alır. Kesit büyüdüğünden gerilme sürekli artar, yani kırılma gerçekleşmez. Gerilme-şekildeğiştirme diyagramı orijine göre yaklaşık simetridir. Sünek malzemeler için basınç deneyine gerek yoktur. Hesaplama amaçlı karakteristikler çekme deneyinden elde edilir.



Gevrek malzemelerde basınç etkisinde kırılma ya kayma etkisinde veya çekme etkisinde oluşur. Malzemenin türü, deney numunesinin biçimi ve boyutları kırılma türünü ve basınç dayanımını çok etkiler. Numunenin boyu kısa ise kayma etkisinde, uzun ise orta kısımda yanal doğrultuda oluşan çekme gerilmelerine dik yönde yarıma şeklinde oluşur.

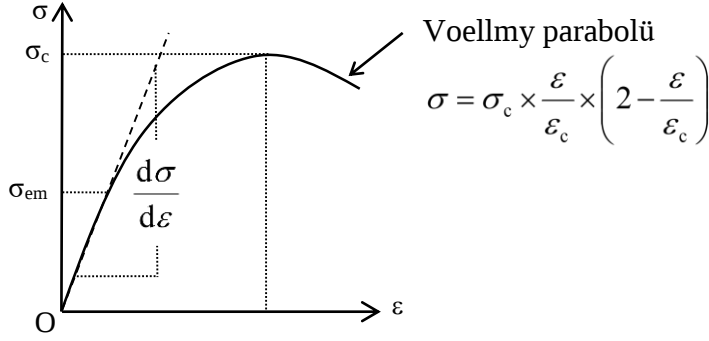


Beton gibi gevrek malzemeler basınç altında kırılmadan önce çok küçük miktarda şekil değiştirirler. Bu tür malzemelerin basınç dayanımları çekme dayanımlarının yaklaşık 8-10 katı kadardır.

Örnek: Kenar uzunluğu 15 cm bir beton küp numune üzerinde gerçekleştirilen basınç deneyi sonucu numune 90 ton yük altında kırılmıştır. Uygulanan yük doğrultusunda kırılma sonunda 0.3 mm kısalma ölçülmüştür. Elde edilen $(\sigma-\varepsilon)$ ilişkisi Voellmy parabolüne uygundur.

- a) Bu beton 3 m yüksekliğinde bir kolonun üretiminde kullanılacaktır. Bu kolonun 120 ton yükü 2.5 kat emniyetle taşıyabilmesi için kesit alanını bulunuz.
- b) Kolonun bu yük altında ani kısalmasını hesaplayınız.

Cözüm:



a) $\sigma_c = \frac{F}{A} = \frac{90000}{15 \times 15} = 400 \text{ kgf/cm}^2$ $\varepsilon_c = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0.3}{150} = 2 \times 10^{-3}$

$\sigma_{em} = \frac{\sigma_c}{n} = \frac{400}{2.5} = 160 \text{ kgf/cm}^2$ $A = \frac{F}{\sigma_{em}} = \frac{120000}{160} = 750 \text{ cm}^2 \text{ (25} \times 30 \text{ cm)}$

b) $\sigma = \sigma_c \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \times \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)$ $x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}$ $\sigma = \sigma_c \times x \times (2 - x)$

$\sigma_c \times x^2 - 2 \sigma_c \times x + \sigma = 0$ $\sigma = \sigma_{em}$ alınır.

$x_{1,2} = \frac{\sigma_c \pm \sqrt{\sigma_c^2 - \sigma_c \times \sigma_{em}}}{\sigma_c} = \frac{400 \pm \sqrt{400^2 - 400 \times 160}}{400} = 1 \pm 0.775$ $x_2 = 1.775$

$x_1 = 0.225$

$x_2 = 1.775$ için, $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = 1.775$ $\varepsilon = 1.775 \times \varepsilon_c$ $\varepsilon \leq \varepsilon_c$ olmalı.

$x_1 = 0.225$ için, $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = 0.225$ $\varepsilon = 0.225 \times \varepsilon_c = 0.225 \times 2 \times 10^{-3} = 4.5 \times 10^{-4}$

$\Delta l_i = \varepsilon \times l_0 = 4.5 \times 10^{-4} \times 3000 = 1.35 \text{ mm olur.}$

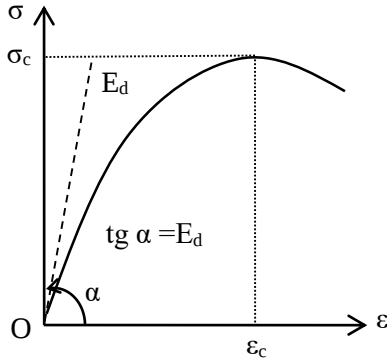
Örnek: Yapılan bir basınç deneyinde, betonun basınç dayanımı 225 kgf/cm^2 , kırılma-kısalma oranı 4×10^{-3} olarak ölçülmüştür. Betona ait gerilme-şekildeğiştirme (σ - ϵ) diyagramı Voellmy parabolüne uygundur.

- Betonun dinamik elastiklik modülünü hesaplayınız.
- Betonun kırılma işini hesaplayınız.
- Bu betondan üretilen 3 m yüksekliğinde bir kolonu 150 ton yük altında ani kısalması 1 mm'yi geçmeyecek şekilde boyutlandırınız. Kolon, üzerindeki bu yükü kaç kat emniyetle taşımaktadır?
- Aynı yük etkisinde, ani kısalması 3 mm'yi geçmeyecek şekilde kolonun kesit alanını hesaplayınız.

Çözüm:

- Voellmy parabolünün matematiksel ifadesi

$$\sigma = \sigma_c \times \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \times \left(2 - \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right) = \frac{2\sigma_c}{\epsilon_c} \times \epsilon - \sigma_c \frac{\epsilon^2}{\epsilon_c^2} \quad \sigma_c = 225 \text{ kgf/cm}^2 \quad \epsilon_c = 4 \times 10^{-3}$$



(σ - ϵ) eğrisinin orijindeki eğimi dinamik elastiklik modülünü verir. Yani,

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{2\sigma_c}{\epsilon_c} - \frac{2\sigma_c}{\epsilon_c^2} \times \epsilon$$

$$\epsilon = 0 \text{ için } E_d = \frac{2\sigma_c}{\epsilon_c}$$

$$E_d = \frac{2\sigma_c}{\epsilon_c} = \frac{2 \times 225}{4 \times 10^{-3}} = 11.25 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$$

- Kırılma işi (σ - ϵ) eğrisi altında kalan alandır. Buna göre,

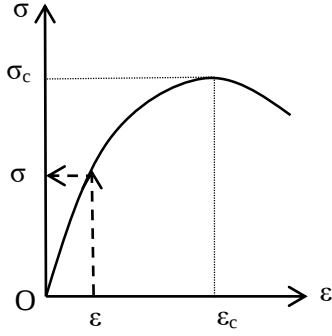
$$W_k = \int_0^{\epsilon_c} \sigma d\epsilon = \left[\frac{2\sigma_c}{\epsilon_c} \times \frac{\epsilon^2}{2} \right] - \left[\frac{\sigma_c}{\epsilon_c^2} \times \frac{\epsilon^3}{3} \right] = \frac{2\sigma_c \times \epsilon_c^2}{2\epsilon_c} - \frac{\sigma_c \times \epsilon_c^3}{3\epsilon_c^2}$$

$$W_k = \sigma_c \times \epsilon_c - \frac{\sigma_c \times \epsilon_c}{3} = \frac{2}{3} \sigma_c \times \epsilon_c$$

$$W_k = \frac{2}{3} \times 225 \times 4 \times 10^{-3} = 0.60 \text{ kgf/cm}^2$$

- $F = 150 \text{ ton}$, $l_0 = 3 \text{ m} = 3000 \text{ mm}$, $\Delta l \leq 1 \text{ mm}$, $A = ?$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{3000} = 3.33 \times 10^{-4} \Rightarrow \sigma = ?$$



$$\sigma = \frac{2\sigma_c}{\epsilon_c} \times \epsilon - \sigma_c \times \frac{\epsilon^2}{\epsilon_c^2}$$

$$\sigma = \frac{2 \times 225}{4 \times 10^{-3}} \times 3.33 \times 10^{-4} - \frac{225}{(4 \times 10^{-3})^2} \times (3.33 \times 10^{-4})^2$$

$$\sigma = 37.5 - 1.5625 \cong 35.94 \text{ kgf/cm}^2$$

$$A = \frac{F}{\sigma} = \frac{150000}{35.94} \cong 4174 \text{ cm}^2$$

$$n = \frac{\sigma_c}{\sigma} = \frac{225}{35.94} \cong 6.25 \text{ kat emniyet olur.}$$

d) $\Delta l = 3 \text{ mm}$ için $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_o} = \frac{3}{3000} = 10^{-3}$

$$\sigma = \frac{2 \times 225}{4 \times 10^{-3}} \times 10^{-3} - \frac{225}{(4 \times 10^{-3})^2} \times (10^{-3})^2 = 112.5 - 14.06 = 98.44 \text{ kgf/cm}^2$$

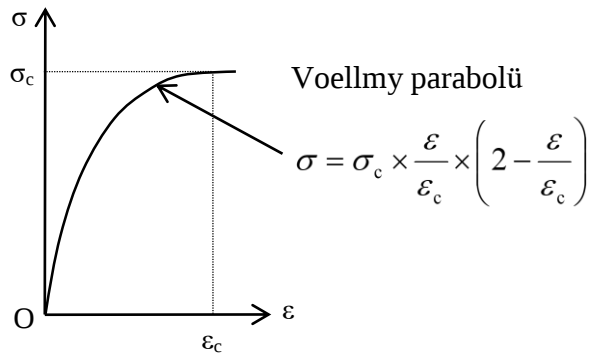
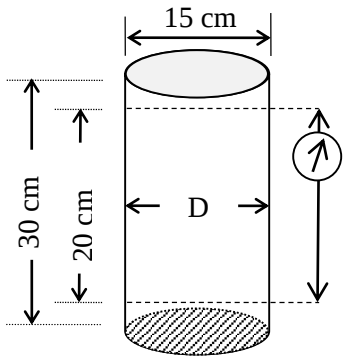
$$A = \frac{F}{\sigma} = \frac{150000}{98.44} \cong 1524 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

$$n = \frac{\sigma_c}{\sigma} = \frac{225}{98.44} \cong 2.29 \text{ kat emniyet}$$

Örnek: Bir betondan alınan 15 cm çapında ve 30 cm yüksekliğinde bir silindir numune üzerinde gerçekleştirilen basınç deneyi sonucu kırılma yükü 70680 kgf, 20 cm'lik ölçü boyu üzerinde ölçülen kırılma kısalması 0.8 mm ölçülmüştür. Betonun (σ - ϵ) diyagramı Voellmy parabolüne uygundur.

- Bu betondan üretilen 3 m yüksekliğinde bir kolonu 96 ton yükü 2.5 kat emniyetle taşıyacak biçimde boyutlandırınız.
- Bu yükleme altında meydana gelen ani kısalmayı hesaplayınız.

Çözüm:



a) $A_o = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 15^2}{4} = 176.7 \text{ cm}^2$

$$\sigma_c = \frac{F}{A_o} = \frac{70680}{176.7} = 400 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\epsilon_c = \frac{\Delta l}{l_o} = \frac{0.8}{200} = 0.004 = 4 \times 10^{-3}$$

Emniyet katsayısı, $n = 2.5$ için,

$$\sigma_{em} = \frac{\sigma_c}{n} = \frac{400}{2.5} = 160 \text{ kgf/cm}^2 \quad A = \frac{F}{\sigma_{em}} = \frac{96000}{160} = 600 \text{ cm}^2 \quad (20 \times 30 \text{ cm}) \text{ bulunur.}$$

$$b) \quad \sigma = \sigma_c \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \times \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right) \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = x \quad \sigma = \sigma_{em} = 160 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = \sigma_c \times x (2 - x) = 2 \sigma_c \times x - \sigma_c \times x^2 \Rightarrow \sigma_c \times x^2 - 2 \sigma_c \times x + \sigma = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{\sigma_c \pm \sqrt{\sigma_c^2 - \sigma_c \times \sigma}}{\sigma_c} = \frac{400 \pm \sqrt{400^2 - 400 \times 160}}{400} = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{5}} = 1 \pm 0.775$$

$$x_1 = 1.775 \Rightarrow \varepsilon = 1.775 \times \varepsilon_c \text{ olur. } \varepsilon \leq \varepsilon_c \text{ olmalıdır.}$$

$$x_2 = 0.225 \Rightarrow \varepsilon = 0.225 \times \varepsilon_c = 0.225 \times 4 \times 10^{-3} = 0.9 \times 10^{-3}$$

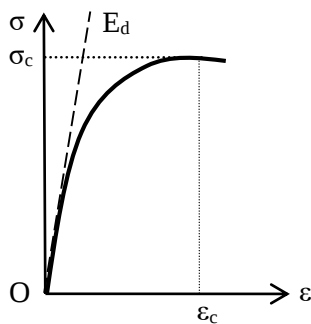
$$\varepsilon = 0.9 \times 10^{-3} \text{ için } \Rightarrow \Delta l_i = \varepsilon \times l_0 = 0.9 \times 10^{-3} \times 3000 = 2.7 \text{ mm olur.}$$

Örnek: Bir betonun basınç dayanımı 270 kgf/cm^2 , kırılma-kısalma oranı 0.003 olarak belirlenmiştir. Betonun $(\sigma-\varepsilon)$ diyagramı Voellmy parabolüne, $\sigma = \sigma_c \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \times \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)$,

uygundur. Buna göre;

- Dinamik elastiklik modülü (Başlangıç tanjant modülü),
- $\varepsilon = \varepsilon_c / 3$ noktasında teğet modülünü,
- Kırılma noktasında sekant modülünü,
- Kırılma işini hesaplayınız
- Bu betondan yapılmış 3 m boyunda bir kolonu 135 ton yük altında 3.0 mm 'den fazla kısalma yapmayacak şekilde kesit alanını hesaplayınız.

Çözüm:



$$\sigma_c = 270 \text{ kgf/cm}^2 \quad \varepsilon_c = 3 \times 10^{-3}$$

- Dinamik elastiklik modülü

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_d \quad E_d = 2 \times \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} = \frac{2 \times 270}{3 \times 10^{-3}} = 1.8 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

- $\varepsilon = \varepsilon_c / 3$ noktasında teğet modülü

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_t \quad E_t = 2 \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} - 2 \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c^2} \times \varepsilon = 2 \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} - 2 \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c^2} \times \frac{\varepsilon_c}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} = \frac{4}{3} \times \frac{270}{3 \times 10^{-3}} = 1.2 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_c / 3$$

c) Kırılma noktasında sekant modülü, $\varepsilon = \varepsilon_c$

$$\sigma = \sigma_c \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right) = \sigma_c \times \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c} \left(2 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c} \right) = \sigma_c = 270 \text{ kgf/cm}^2$$

$$E_s = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (\sigma = 270 \text{ kg/cm}^2 \text{ için}) \quad E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{270}{10^{-3}} = \frac{270}{3 \times 10^{-3}} = 0.9 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

d) Kırılma işi (Birim hacim için harcanan enerji)

$$W_k = \frac{2}{3} \times \sigma_c \times \varepsilon_c = \frac{2}{3} \times 270 \times 3 \times 10^{-3} = 0.54 \text{ kgf/cm}^2$$

e) $l_0 = 3 \text{ m}$ $F = 135 \text{ ton}$ $\Delta l \leq 3.0 \text{ mm}$ $A = ?$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{3.0}{3000} = 10^{-3} \quad \sigma = 270 \times \frac{10^{-3}}{3.0 \times 10^{-3}} \left(2 - \frac{10^{-3}}{3.0 \times 10^{-3}} \right) = \frac{5}{9} \times 270 = 150 \text{ kgf/cm}^2$$

$$A = \frac{F}{\sigma} = \frac{135000}{150} = 900 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$