

Öğrenci No: Ad-Soyad:.....

1) Aşağıdaki önermeleri ispat ediniz.

- i) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ise $\det(A.B) = \det(B.A)$,
- ii) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonal matris ise $\det(A) \in \{1, -1\}$,
- iii) A ile B benzer matrisler ise $\det(B) = \det(A)$,
- iv) $2 < n$, $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$, $a_{ij} = i + j$ ise $\det(A) = 0$,
- v) $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) = \det(A)$ lineer dönüşüm değil,
- vi) $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $f(A) = \text{Adj}(A)$ lineer dönüşüm,
- vii) A ortogonal matris ise $\text{adj}(A)$ ortogonal matristir,
- viii) A regüler matris ise $\text{adj}(A)$ regüler matristir,
- ix) $A \in M_n(\mathbb{R})$ ters simetrik matris ve n tek ise $\det(A) = 0$,
- x) $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrik matris ise $\det(A+B) = \det(A+B^T)$,
- xi)

2) Aşağıdaki özelliklere sahip matrisler belirleyiniz.

- i) $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ benzer matrisler değil ancak $\det(A) = \det(B)$,
- ii) $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$,
- iii) $A = \begin{bmatrix} B_{2 \times 2} & C_{2 \times 2} \\ D_{2 \times 2} & E_{2 \times 2} \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$, $\det A \neq \det(B) \cdot \det(E) - \det(C) \cdot \det(D)$.

3) Aşağıdaki matrislerin determinantlarını belirleyiniz.

$$\begin{bmatrix} a+b+c & a+b & a & a \\ a+b & a+b+c & a & a \\ a & a & a+b+c & a+b \\ a & a & a+b & a+b+c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} na_1+b_1 & na_2+b_2 & na_3+b_3 \\ nb_1+c_1 & nb_2+c_2 & nb_3+c_3 \\ nc_1+a_1 & nc_2+a_2 & nc_3+a_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & a & \cdots & a & -a \\ a & a & \cdots & -a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & -a & \cdots & a & a \\ -a & a & \cdots & a & a \end{bmatrix},$$

4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $2 \leq n$ ise $\det(A) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$ olduğunu gösteriniz.

5) Aşağıdaki lineer denklem sistemlerinin çözümlerini determinantı kullanarak belirleyiniz.

- i) $x_1 + x_2 + x_3 = a$
 $x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 2a$
 $x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = 0$
- ii) $6x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$
 $ax_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$
 $-2x_1 + x_2 + -3x_3 = b$
- iii) $2x_1 + x_2 + 2a x_3 = 0$
 $2x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0$
 $2x_1 + 6x_2 + (a^2 - b^2 + 2a) x_3 = 0$

6) Aşağıdaki lineer denklem sistemini 4 farklı metotla çözünüz.

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + x_3 &= -5 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 + -3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

7) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin regüler olduğunu gösteriniz. Ayrıca determinant yardımıyla tersini bulunuz.

8) $M = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$, $N = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$ kümeleri üzerinde “+”, “.” Bağlıntılarının ikili işlem olup olmadığını araştırınız. İkili işlem olanların grup, değişmeli grup olup olmadıklarını belirleyiniz.