

- 1) $AX=\lambda X$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise $A^n X = \lambda^n X$ olduğunu gösteriniz.
 2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ regüler matrisdir $\Leftrightarrow 0$ A matrisinin öz-değeri değil olduğunu gösteriniz.
 3) $A \in M_n(\mathbb{R})$, α A'nın öz-değeri olsun. Bu durumda aşağıdakileri ispatlayınız.

- i) α^k A'nın öz-değeri,
 ii) $0 \neq \alpha$ ise $\frac{|A|}{\alpha}$ $\text{adj}(A)$ 'nın öz-değeri,
 iii) A regüler matris ise $\alpha \neq 0$ ve $\frac{1}{\alpha}$ A⁻¹'in öz-değeri,
 iv) α nın geometrik katlılığı n ise $A = \alpha I_n$ şeklindedir,
 v) A ortogonal matris ise $\alpha \in \{1, -1\}$,

- vi) $\alpha\beta$ $\beta \cdot A$ 'nın öz-değeri,
 vii) αA^T 'nin öz-değeri,
 viii) A ters-simetrik ise $\alpha = 0$,
 ix) A diyagonal matris ise $\alpha \in \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$.

- 4) $A \in M_n(\mathbb{R})$ regüler matris ise $\Delta_{AB}(x) = \Delta_{BA}(x)$ olduğunu gösteriniz.
 5) $A \in M_n(\mathbb{R})$, A regüler matris ve a A.A^T matrisinin öz-değeri ise $0 < a$,
 6) X A ve B matrislerinin öz-vektörü ise $X A + B$, A.B, A², $\beta \cdot A$ matrislerinin öz-vektörüdür,
 7) $M_2(\mathbb{R})$ 'de aşağıdaki özellikleri sağlayan matrisler belirleyiniz.

- i) α A ve B matrislerinin öz-değeri, $\alpha A + B$ matrisinin öz-değeri değil,
 ii) A ile A^T matrislerinin öz-vektörlerinin kümelerinin arakesiti boş küme,
 iii) α A matrisinin öz-değeri, cebirsel katlılığı 2, geometrik katlılığı 1,
 iv) α A ve B matrislerinin öz-değeri, $\alpha A \cdot B$ matrisinin öz-değeri değil,
 v) A ile B benzer değil ancak karakteristik polinomları eşit,
 vi) $\Delta_{AB}(x) \neq \Delta_{BA}(x)$.

- 8) $A \in M_2(\mathbb{R})$ olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahip bütün matrisleri belirleyiniz;

- i) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ A'nın öz-vektörü ve 2 A'nın öz-değeri;
 ii) 2 A matrisinin öz-değeri ve A diyagonalleştirilebilir matris;
 iii) 5 A'nın öz-değeri ve cebirsel katlılığı 2;
 iv) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,
 v) A'nın öz-değerleri sadece 2,
 vi) 2 A'nın öz-değeri,
 vii) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;
 viii) $\Delta_A(x) = x^2 - x + 2$
 ix) $\text{Boy}(A_4) = 2$

- 9) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. Buna göre

- i) A, B matrislerinin matrisinin karakteristik polinomunu, öz-değerlerini, öz-vektörlerini, öz-değerlerinin cebirsel ve geometrik katlılıklarını belirleyiniz.

- ii) B⁸⁰ matrisini belirleyiniz.

- 10) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ öz-vektörlerine sahip bütün $A \in M_3(\mathbb{R})$ matrislerini belirleyiniz.

- 11) $A \in M_5(\mathbb{R})$, $r(A) = 3$ ise $\alpha = 0$ elemanının geometrik katlılığının 2 olduğunu gösteriniz.

- 12) $\Delta_A(x) = -x^3 - 2x^2 + x - 4$ koşulunu sağlayan bir matris ise A matrisinin regüler matris olduğunu gösteriniz ve A⁻¹ matrisini belirleyiniz.

- 13) $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrisinin n tane öz-değeri mevcut ise öz-değerlerinin çarpımının A matrisinin determinantı olduğunu gösteriniz.

- 14) $M_2(f) = \langle (1, 1, -1) \rangle$, $M_4(f) = \langle e_2, e_3 + e_1 \rangle$ eşitliklerini sağlayan $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümlerini belirleyiniz;

- 15) Aşağıdaki özellikleri sağlayan $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümleri belirleyiniz.

- i) $(1, 1) \in M_2(f)$,
 ii) $M_2(f) = \langle (1, 1) \rangle$,
 iii) f'nin öz-değerleri 2, 5

- 16) $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y, 2y, x + y + 3z)$, $g(x, y, z) = (-x + y - z, -x + y - z, 0)$ lineer dönüşümleri verilsin. Buna göre;

- i) f, g'nin öz-değerlerini, öz-vektörlerini, öz-alt uzaylarını belirleyiniz,

- ii) $T = \{e_2, e_3\}$, $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$ tabanları için $M(f, T, T)$, $M(f, S, S)$ matrislerinin diyagonalleştirilebilir olup olmadığını araştırınız.

- 17) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ öz-vektörlerine sahip bütün $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümleri belirleyiniz.

- 18) $M = \{f | f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbb{R}\text{-vektör uzayında } T = \{x, e^x, e^{2x}, \dots, e^{15x}, \sin x + 2\cos x\} \text{ kümesinin lineer bağımsız küme olduğunu gösteriniz};$