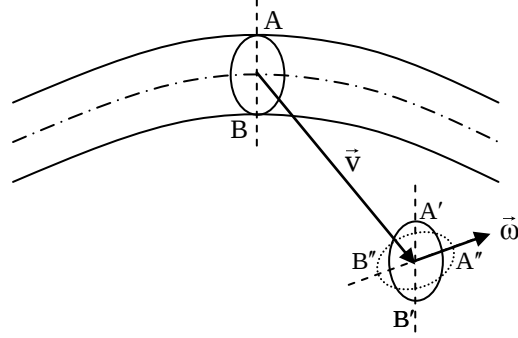


2.3. İsostatik Sistemlerde Yer ve Şekildeğiştirmelerin Hesabı

2.3.1. Genel Bilgiler

Dış etkiler altında şekil ve yerdeğiştiren dolu bir çubuk sistemin, herhangi bir kesitin durumunu iki vektör ile belirlemek mümkündür. Bunlardan birincisi $\vec{v}$ lineer yerdeğiştirme vektörü, ikincisi ise $\vec{\omega}$ açısal yerdeğiştirme vektörüdür.



Uzay sistemlerde; x, y, z eksenleri üzerinde $\vec{v}$ vektörünün v_x, v_y, v_z gibi, $\vec{\omega}$ vektörünün ise $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ gibi üç bileşeni vardır.

Düzlem sistemlerde; $\vec{v}$ vektörü sistem düzlemi içindedir. x, y eksenleri de sistem düzlemi içinde seçildiğine göre $\vec{v}$ vektörünün v_x, v_y gibi iki bileşeni vardır. $\vec{\omega}$ vektörü ise sistem düzlemine diktir ve ω_z gibi tek bileşeni vardır.

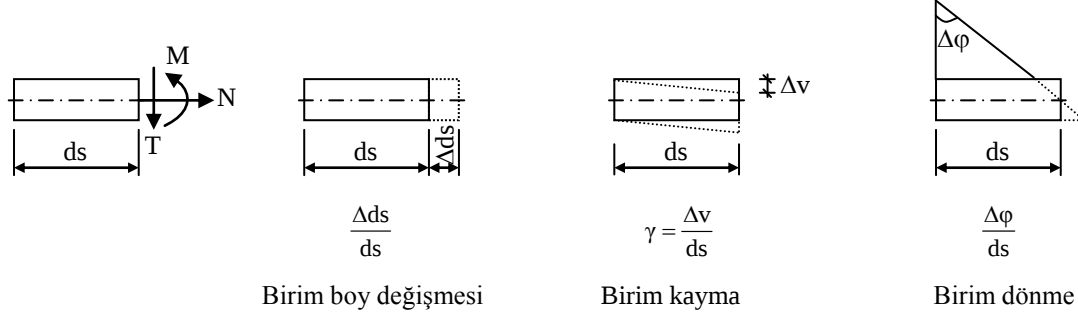
Kafes sistemlerde; yerdeğiştirme durumunu düğüm noktalarının yalnız lineer deplasmanları ile belirlemek mümkündür. Uzay kafes sistemlerde bu vektörün , düzlem kafes sistemlerde ise iki bileşeni vardır.

Bir sistemin yerdeğiştirmelerinin incelenmesinin amacı; dolu sistemlerde kesitlerin $\vec{v}$ lineer ve $\vec{\omega}$ açısal yerdeğiştirme vektörlerinin, kafes sistemlerde ise düğüm noktalarının $\vec{v}$ lineer yerdeğiştirmelerinin belirlenmesidir.

Bir kesitin diğer bir kesite göre $\Delta\vec{v}$ ve $\Delta\vec{\omega}$ rölatif yerdeğiştirme vektörlerine şekildeğiştirme vektörleri denir.

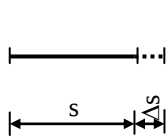
ds uzunluğundaki bir çubuk elemanın bir yüzünün diğer yüzüne göre rölatif yerdeğiştirmelerine ds elemanın şekildeğiştirmeleri denir. Bu şekildeğiştirmelerin kesit tesirleri üzerindeki bileşenleri aşağıda tanımlanmıştır.

a) Düzlem Çubuklar:



Bunların pozitif yönleri, kesit tesirlerinin bu şekildeğiştirmelerde yaptıkları iş pozitif olacak şekilde seçilmiştir.

b) Kafes Çubuklar

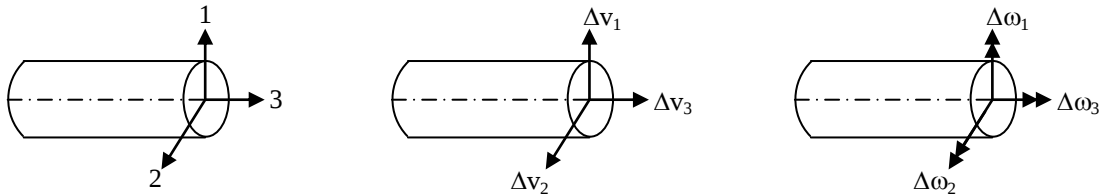


s : çubuk uzunluğu

Δs : çubuktaki boy değişimi olmak üzere

$$\Delta s = \int \frac{\Delta ds}{ds} ds, \quad \frac{\Delta v}{ds} = 0, \quad \frac{\Delta \phi}{ds} = 0 \text{ dir.}$$

c) Uzak Çubuklar



1 ve 2 eksenleri kesitin asal eksenleri, 3 eksenini ise kesitin düzlemine dik eksen olarak seçilmiştir.

$\frac{\Delta v_1}{ds}$, $\frac{\Delta v_2}{ds}$, $\frac{\Delta v_3}{ds}$; elemanın bir yüzünün diğer yüzüne göre lineer yerdeğiştirme vektörünün 1, 2, 3 eksenini üzerindeki bileşenleri.

$\frac{\Delta \omega_1}{ds}$, $\frac{\Delta \omega_2}{ds}$, $\frac{\Delta \omega_3}{ds}$; elemanın bir yüzünün diğer yüzüne göre açısal yerdeğiştirme vektörünün 1, 2, 3 eksenini üzerindeki bileşenleri.

2.3.2. Kesit Tesirleri ile Şekildeğiştirmeler Arasındaki Bağıntılar

a) Düzlem Çubuklar:

Lineer elastik malzemeden yapılmış olan çubuklarda kesit tesirleriyle şekildeğiştirmeler arasında;

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} \quad , \quad \frac{\Delta v}{ds} = \gamma = \frac{T}{GF'} \quad , \quad \frac{\Delta \phi}{ds} = \frac{M}{EI}$$

bağıntıları mevcuttur. Burada EF , GF' , EI sırasıyla uzama, kayma ve eğilme rijitliklerini göstermektedir.

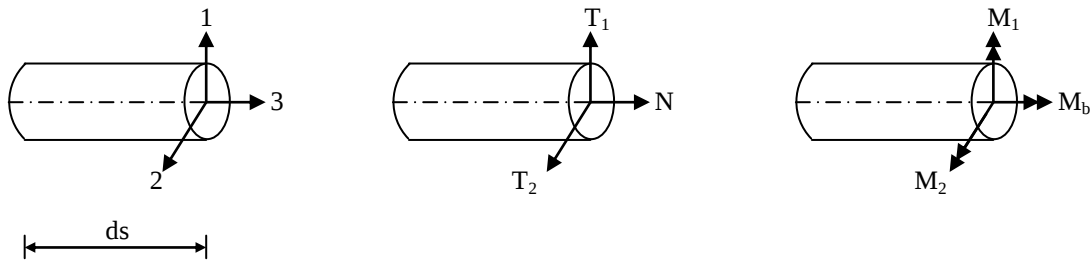
b) Kafes Çubuklar:

Kafes sisteme çubuklarında S , E , F bir çubuk boyunca sabit olduğundan lineer elastik malzeme için bu bağıntılar;

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{S}{EF} \quad , \quad \Delta s = \int_{s=0}^s \frac{\Delta ds}{ds} ds = \int_{s=0}^s \frac{S}{EF} ds = \frac{S}{EF} s$$

şeklindedir.

c) Uzay Çubuklar:



Lineer elastik malzeme için kesit tesirleriyle şekildeğiştirmeler arasında;

$$\frac{\Delta v_3}{ds} = \frac{N}{EF} \quad , \quad \frac{\Delta v_2}{ds} = \frac{T_2}{GF'_2} \quad , \quad \frac{\Delta v_1}{ds} = \frac{T_1}{GF'_1}$$

$$\frac{\Delta \omega_3}{ds} = \frac{M_b}{GI_b} \quad , \quad \frac{\Delta \omega_2}{ds} = \frac{M_2}{EI_2} \quad , \quad \frac{\Delta \omega_1}{ds} = \frac{M_1}{EI_1}$$

Burada EF uzama; GF'_1, GF'_2 ; 1 ve 2 eksenlerine göre kayma; EI_1, EI_2 ; 1 ve 2 eksenlerine göre eğilme ve GI_b burulma rijitliklerini göstermektedir.

2.3.3. Yerdeşiştirmelerin Hesabında İzlenen Yol ve Kullanılan Yöntemler

Yerdeşiştirmelerin hesabında izlenen yol aşağıda özetlenmiştir:

1. Dış etkilerden meydana gelen kesit tesirleri bulunur. (İzostatik sistemlerde kesit tesirleri yalnız dış yüklerden meydana gelir).
2. Kesit tesirlerine bağlı olarak şekildeğiştirmeler belirlenir.
3. Aşağıdaki yöntemlerden biri ile yerdeğiştirmeler hesaplanır.

Williot Yöntemi: Bu yöntem, kafes sistemlerde düğüm noktalarının yerdeğiştirmelerini bulmak için kullanılan bir yöntemdir.

Mohr Yöntemi: Bu yöntem, dolu sistemlerin çökme denilen bir doğrultudaki yerdeğiştirme bileşenlerini elde etmek için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde, genel olarak kayma ve boy değişimleri dikkate alınmaz, sadece eğilme deformasyonları dikkate alınabilir.

ω Kuvvetleri Yöntemi: Birçok kesitteki veya kafes kirişlerde birçok düğüm noktasındaki yerdeğiştirmelerin bir doğrultu üzerindeki izdüşümlerinin bulunması istendiğinde bu yöntem kullanılır. Bu yöntemde, kayma ve boy değişimlerinin hesaba katılması mümkün olmaktadır.

Virtüel İş Teoremi: Dolu ve kafes sistemlere uygulanabilir. Eğilme, uzama ve kayma deformasyonları hesapta dikkate alınabilir. Diğer yöntemlere göre uygulanabilirliği daha kolaydır.

2.3.4. Virtüel İş Teoremi ile Yerdeğiştirme Hesabı

2.3.4.1. Virtüel İş Teoremi

Dengede olan bir sistemde, geometrik uygunluk şartlarını sağlayan herhangi bir küçük virtüel şekildeğiştirmede dış kuvvetlerin yaptığı iş, iç kuvvetlerin yaptığı şekildeğiştirme işine eşittir.

Sistemin sonsuz küçük olan ve şekildeğiştirebilen elemanlardan meydana geldiği ve bunların rijit elemanlarla birbirlerine bağlandığı düşünülebilir. şekildeğiştiren elemanlar çok küçük olduklarından dış kuvvetlerin hepsinin rijit elemanlara etkidiği de kabul edilebilir.

Denge durumunda bulunan sisteme, geometrik uygunluk şartlarını sağlayan herhangi bir küçük virtüel şekildeğiştirme verildiği zaman, rijit elemanlar δ_v kadar yerdeğiştireceklerdir. Sistem dengede olduğundan her rijit eleman kendisine etkiyen P_i iç kuvvetleriyle P_d dış kuvvetlerinin etkisi altında dengede olacaktır. O halde her rijit eleman için;

$$P_d + P_i = 0 \quad \text{ve} \quad (P_d + P_i)\delta_v = 0 \Rightarrow P_d \cdot \delta_v = -P_i \cdot \delta_v$$

yazılabilir. Burada;

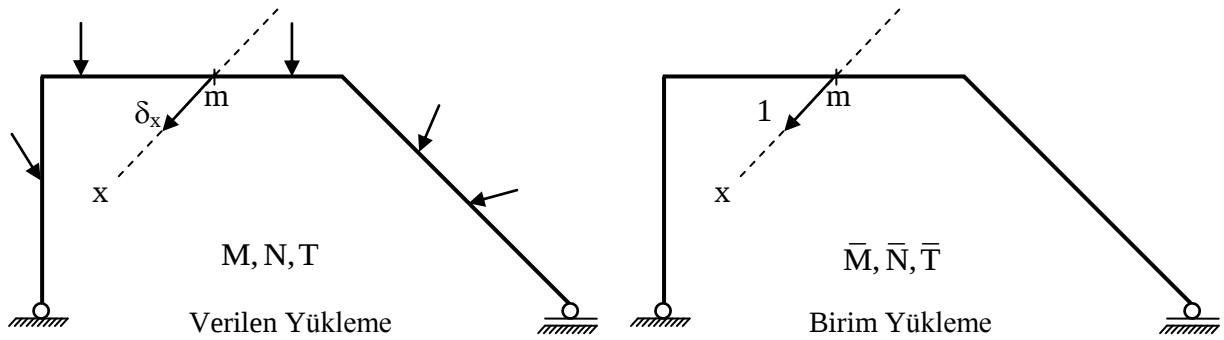
$P_d \cdot \delta_v$; virtüel şekildeğiştirmede bir rijit elemana etkiyen P_d dış kuvvetlerinin yaptıkları işi,
 $-P_i \cdot \delta_v$; δ_v virtüel şekildeğiştirmelerinde o rijit elemanın temas ettiği şekildeğiştiren elemanlarda iç kuvvetlerin yaptığı şekildeğiştirme işini,

göstermektedir. Bunun şekildeğiştirme işi olmasının sebebi, rijit elemanlardan biri yerdeğiştirdiği zaman diğer elemanların sabit kalmasıdır. Bundan dolayı, rijit elemanların yerdeğiştirmesi olan δ_v , bu halde şekildeğiştiren elemanlar için şekildeğiştirme işi değildir. Her bir rijit eleman için geçerli olan bu bağıntılar tüm sistem için yazılırsa,

$$\sum P_d \cdot \delta_v = -\sum P_i \cdot \delta_v$$

bulunur.

2.3.4.2. Virtüel İş Teoremi ile Yerdeğiştirme Hesabının Esasları



Dış etkilerden meydana gelen kesit tesirleri ve şekildeğiştirmeleri bilinen bir sistemin herhangi bir m noktasındaki yerdeğiştirmenin herhangi bir x doğrultusu üzerindeki δ_x bileşenini belirlemek için, sistemin bu m noktasına aynı doğrultu ve yönde 1 birim kuvvet uygulanır ve bu yüklemeye “birim yükleme” denir. Sistemde birim yüklemeden meydana gelen kesit tesirleri dolu düzlem sistemlerde $\bar{M}, \bar{N}, \bar{T}$ ile kafes sistemlerde ise $\bar{S}$ ile gösterilir.

	Dış etkilerden meydana gelen kesit tesirleri	Dış etkilerden meydana gelen şekildeğişiklikler
a)	Dolu düzlem sistemlerde;	
	M, N, T	$\Delta\phi = \frac{M}{EI} ds$, $\Delta ds = \frac{N}{EF} ds$, $\Delta v = \frac{T}{GF'} ds$
b)	Kafes sistemlerde;	
	S (Çubuk kuvvetleri)	$\Delta s = \frac{S}{EF} s$ (Çubuk boy değişimleri)
c)	Uzay dolu sistemlerde;	
	T_1, T_2, N	$\Delta v_1 = \frac{T_1}{GF'_1} ds$, $\Delta v_2 = \frac{T_2}{GF'_2} ds$, $\Delta v_3 = \frac{N}{EF} ds$
	M_1, M_2, M_b	$\Delta\omega_1 = \frac{M_1}{EI_1} ds$, $\Delta\omega_2 = \frac{M_2}{EI_2} ds$, $\Delta\omega_3 = \frac{M_b}{GI_b} ds$

Virtüel iş teoremi uygulanırken, yükleme durumu olarak birim yükleme alınır ve virtüel şekildeğiştirme durumu olarak da verilmiş yüklerden meydana gelen şekildeğiştirme durumu seçilir. Bu durumda, dış kuvvetlerin yaptığı iş $1. \delta_x$ olduğundan virtüel iş teoremine göre

$$1. \delta_x = \text{iç kuvvetlerin şekildeğiştirme işi} = \Delta U$$

elde edilir. ΔU şekildeğiştirme işi burada yerine yazılırsa;

a) Dolu düzlem sistemlerde;

$$1. \delta_x = \int \bar{M} \Delta\phi + \int \bar{N} \Delta ds + \int \bar{T} \Delta v$$

$$1. \delta_x = \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds + \int \bar{N} \frac{N}{EF} ds + \int \bar{T} \frac{T}{GF'} ds$$

şeklindedir. Burada eşitliğin sağ tarafında verilen üç terimden uzama ve kayma şekildeğiştirmelerine ait olan son iki terim eğilme şekildeğiştirmesinin yanında ihmal edilebilir.

b) Kafes sistemlerde;

$$1. \delta_x = \Delta U = \sum \bar{S} \Delta s = \sum \bar{S} S \cdot \frac{s}{EF}$$

şeklindedir.

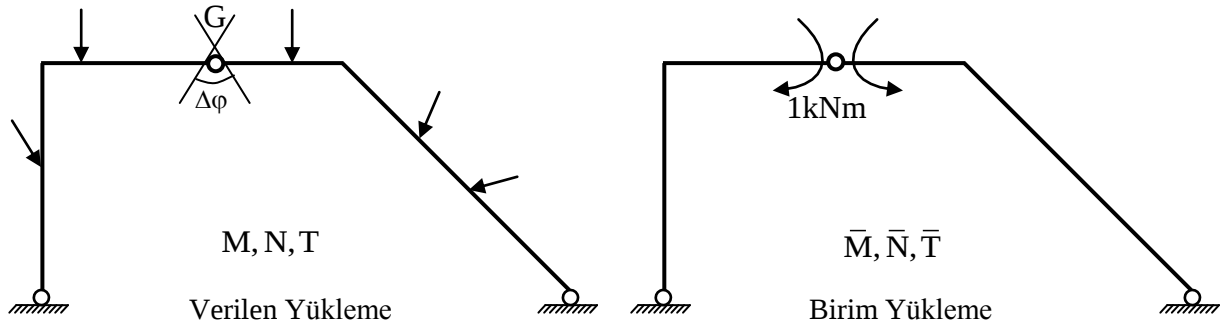
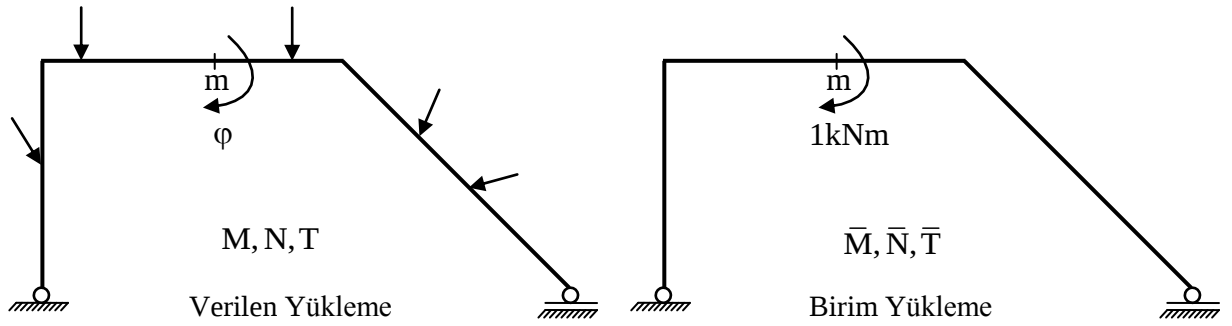
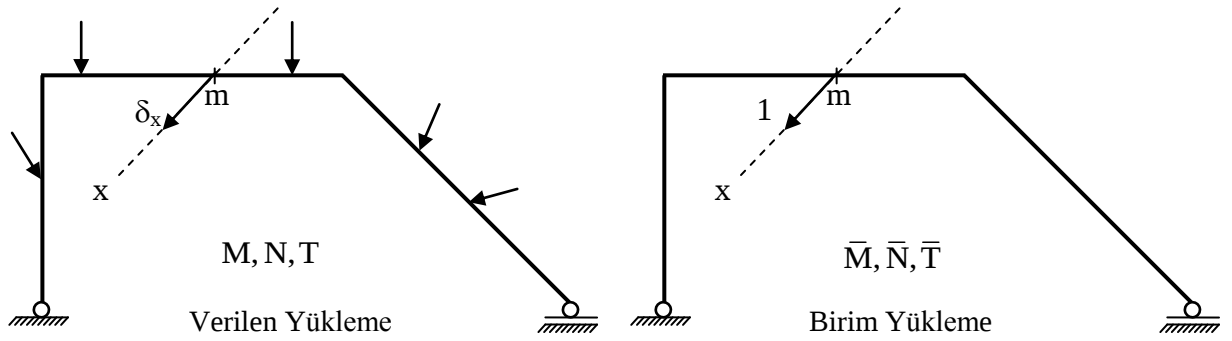
c) Dolu uzay sistemlerde;

$$1.\delta_x = \int \bar{M}_1 \Delta \omega_1 + \int \bar{M}_2 \Delta \omega_2 + \int \bar{M}_b \Delta \omega_3 + \int \bar{T}_1 \Delta v_1 + \int \bar{T}_2 \Delta v_2 + \int \bar{N} \Delta v_3$$

$$1.\delta_x = \int \bar{M}_1 \frac{M_1}{EI_1} ds + \int \bar{M}_2 \frac{M_2}{EI_2} ds + \int \bar{M}_b \frac{M_b}{GI_b} ds + \int \bar{T}_1 \frac{T_1}{GE'_1} ds + \int \bar{T}_2 \frac{T_2}{GE'_2} ds + \int \bar{N} \frac{N}{EF} ds$$

şeklindedir.

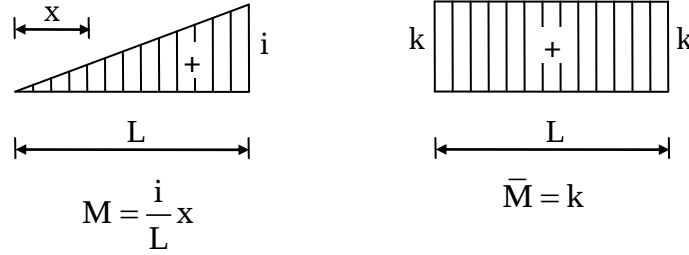
Birim Yüklemlerin Seçilmesine Dair Bazı Örnekler



2.3.4.3. Çarpım Tablosunun Kullanımı

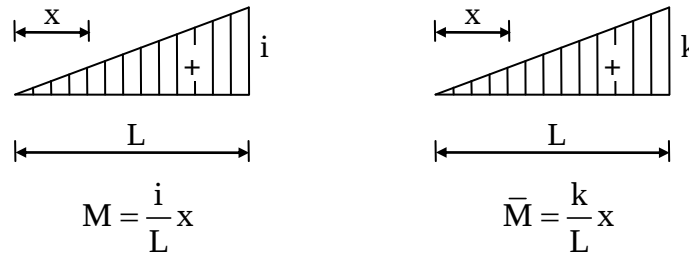
ΔU iç kuvvetlerin şekildeğiştirme işinin hesabında karşılaşılan $\int \bar{M} \frac{M}{EI} ds$ integrallerinin alınışını kolaylaştırmak için eğilme momenti diyagramlarının bazı basit şekilleri için tablo hazırlanmıştır. Bu tablo yardımıyla bu integraller kolaylıkla elde edilebilmektedir.

Örnek 1:



$$\int_0^L M \bar{M} dx = \int_0^L \frac{i}{L} x \cdot k \cdot dx = \frac{ik}{L} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{ik}{L} \frac{L^2}{2} = \frac{1}{2} L \cdot i \cdot k$$

Örnek 2:



$$\int_0^L M \bar{M} dx = \int_0^L \frac{i}{L} x \cdot \frac{k}{L} x \cdot dx = \int_0^L \frac{ik}{L^2} x^2 \cdot dx = \frac{ik}{L^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{ik}{L^2} \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} L \cdot i \cdot k$$