

$$\begin{aligned} 1) a) V(p) &= ((x^2+y)U_1 - 2y^2U_2 - 3U_3)(p) \\ &= (x^2(p)+y(p))U_1(p) - 2y(p)2(p)U_2(p) - 3U_3(p) \\ &= (1-2)U_1(p) - 2(-2) \cdot 3U_2(p) - 3U_3(p) \\ &= -U_1(p) + 12U_2(p) - 3U_3(p) = (-1, 12, -3)p \quad \sqrt{5p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) V[f](p) &= V(p)[f] \quad \sqrt{5p} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)V_1(p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)V_2(p) + \frac{\partial f}{\partial z}(p)V_3(p) \\ &= (3x^2y^2)(p)(-1) + (2x^3y^2)(p)12 + (x^3y^2)(p)(-2) \\ &= 3x^2(p)y^2(p)2(p)(-1) + 2x^3(p)y(p)2(p)12 + x^3(p)y^2(p)(-2) \\ &= -36 - 144 - 12 = -192 \quad \sqrt{5p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) df[\vartheta_p] &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)\vartheta_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\vartheta_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(p)\vartheta_3 \\ &= -36 + 8 = -28 \quad \sqrt{5p} \end{aligned}$$

$$2) e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1 \quad \sqrt{5p}$$

$$e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0 \quad \sqrt{5p}$$

$$\vartheta_p = (\vartheta_p \cdot e_1)e_1 + (\vartheta_p \cdot e_2)e_2 + (\vartheta_p \cdot e_3)e_3 \quad \sqrt{5p}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e_1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e_2 + 3e_3$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + 3e_3 \quad \sqrt{5p}$$

$$3) F_x = (df_1, df_2, df_3) \quad , \quad F = (f_1, f_2, f_3)$$

$$= (2udu, 2\theta d\theta, \theta du + u d\theta)$$

$$a) F_x(\omega_p) = 0 \quad \text{tüm} \quad \omega_p \neq 0 \quad , \quad \omega_p = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)p$$

$$F_x(\omega_p) = (2u(p)du(\omega_p), 2\theta(p)d\theta(\omega_p), \theta(p)du(\omega_p) + u(p)d\theta(\omega_p))_{F(p)}$$

$$= (2p_1\omega_1, 2p_2\omega_2, p_2\omega_1 + p_1\omega_2)_{F(p)}$$

$$F_x(\omega_p) \text{ tüm} \quad 2p_1\omega_1 = 0 \quad \dots (1)$$

$$2p_2\omega_2 = 0 \quad \dots (2)$$

$$p_2\omega_1 + p_1\omega_2 = 0 \quad \dots (3) \quad \checkmark \quad 5p$$

$$p_1 \neq 0 \text{ ve } p_2 = 0 \text{ tüm denklemleri (1) ve (3) için } \omega_p = (0, 0)$$

$$\text{dur.} \quad p_1 = 0 \text{ ve } p_2 \neq 0 \text{ tüm denklemleri (2) ve (3) için } \omega_p = (0, 0)$$

$$\text{dur.} \quad \text{Bu takdirde, } u(p) \neq 0 \text{ veya } \theta(p) \neq 0 \text{ ise } F \text{ regülerdir.}$$

$\checkmark 5p$

$$b) F_x(\theta_p) = (2.1.2, 2.1.3, 1.2 + 1.3)_{F(p)}$$

$$= (4, 6, 5)_{F(p)} \quad \checkmark 10p$$

$$4) a) \alpha'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}}$$

$$= e^t \sqrt{3}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{3} e^u du = \sqrt{3}(e^t - 1)$$

$$\Rightarrow e^t = \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \Rightarrow t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)$$

$$\beta(s) = e^{\ln(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)} \cos(\ln(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)), e^{\ln(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)} \sin(\ln(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)), e^{\ln(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)}$$

$$= \left( \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right), \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right)$$

$$b) L = \int_0^1 \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} e^t \Big|_0^1 = \sqrt{3}(e - 1)$$

$$h) a) \beta'(s) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\|\beta'(s)\| = 1$$

$$\Rightarrow T(s) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$T'(s) = \left( -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), 0 \right)$$

$$K(s) = \|T'(s)\| = \frac{1}{4}$$

$$N(s) = \left( -\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), 0 \right)$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & -\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$B'(s) = \left( \frac{1}{4} \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{4} \sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), 0 \right)$$

$$\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s) = \frac{1}{4}$$

b)  $\tau(s) \neq 0$  olduğundan bir çenter belirtir.

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
SINAV KAĞIDI

Sınav Tarihi : ...../...../.....



Öğrenci No : .....

Adı, Soyadı : .....

Bölümü/Programı : .....

Dersin Adı : .....

Dersin Sorumlusu : .....

| Değerlendirme |          |
|---------------|----------|
| Rakam ile     | Yazı ile |
|               |          |

☐☐

II. Öğretim

2019-2020 GÜZ YARIYILI DİFERANSİYEL GEOMETRİ ARASINAV SORULARI

(09.11.2019) Süre 90 dk. dır.

1)  $V = (x^2 + y)U_1 - 2yzU_2 - 3U_3$ ,  $f(x, y, z) = x^3y^2z$ ,  $v_p = (-1, 0, 2)_p$  ve  $p = (1, -2, 3)$  olmak üzere:

- $V(p) = ?$  (5p)
- $V[f](p) = ?$  (10p)
- $df(v_p) = ?$  (5p)

2)  $e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)_p$ ,  $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)_p$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)_p$  olmak üzere, bu vektörlerin  $p \in \mathbb{R}^3$  noktasında bir çatı tanımladığını gösteriniz.  $v_p = (-2, 1, 3)_p$  vektörünü bu çatı cinsinden ifade ediniz. (20p)

3)  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(u, v) = (u^2, v^2, uv)$  dönüşümü verilsin.

- Bu dönüşümün regülerliğini araştırınız. (10p)
- $v = (2, 3)$  ve  $p = (1, 1)$  olmak üzere  $F_*(v_p)$  yi bulunuz. (10p)

4)  $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$  eğrisi veriliyor.

- $\alpha$  eğrisinin birim hız parametrelenişini bulunuz. (10p)
- $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(0)$  noktasından  $\alpha(1)$  noktasına kadar olan yayının uzunluğunu hesaplayınız. (10p)

5)  $\beta(s) = \left(2 \cos \frac{s}{2\sqrt{2}}, 2 \sin \frac{s}{2\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$  eğrisi verilsin.

- $\beta$  eğrisinin Frenet büyüklüklerinin  $(T, N, B, \kappa, \tau)$  bulunuz. (10p)
- $\beta$  eğrisinin bir çember olup olmadığını belirleyiniz. (10p)