

Free Vibration Analysis of Layered Composite Beams with Delamination Damage

V. Kâhya¹, S. Şimşek^{2*}

¹Department of Civil Engineering, Karadeniz Technical University, Trabzon, Turkey

²Department of Civil Engineering, Karadeniz Technical University, Trabzon, Turkey

Abstract

In this study, free vibrations of laminated composite beams under various delamination scenarios are discussed. The finite element model of the problem is based on Reddy's delaminated beam theory. Here, it is assumed that the displacement field for each layer forming the composite beam changes as linear Lagrange polynomials; the terms expressing the sliding of the layers over each other and the separation of the layers due to delamination are taken into account. Equations of motion are derived using the Hamilton's principle; finite element mass and stiffness matrices are then obtained from here using the Galerkin method. For comparison, a three-dimensional model of the problem is created in ANSYS® finite element software via the SOLID185 element. Two different approaches have been considered in modeling the delaminated surface. In the first of these, the free movement of the nodal points on the delaminated surfaces is allowed; In the second, these nodes are provided to move together with the help of contact elements. The results obtained for various delamination scenarios are presented comparatively. It has been observed that the results are compatible with each other.

Keywords: Delamination, layered composite, finite element method, free vibration.

Delaminasyon Hasarı Bulunan Tabakalı Kompozit Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi

Özet

Bu çalışmada, tabakalı kompozit kirişlerin çeşitli delaminasyon senaryoları altında serbest titreşimleri ele alınmıştır. Problemin sonlu eleman modeli, Reddy'nin delaminasyonlu kiriş teorisine dayanmaktadır. Burada, kompozit kirişi oluşturan her tabaka için yer değiştirme alanının doğrusal Lagrange polinomları şeklinde değiştiği kabul edilmiş; delaminasyon sebebiyle tabakaların birbiri üzerinden kayması ve tabakaların birbirlerinden ayrılmasını ifade eden terimler hesaba katılmıştır. Hamilton ilkesi kullanılarak hareket denklemleri türetilmiş; buradan da Galerkin yöntemiyle sonlu eleman kütle ve rijitlik matrisleri elde edilmiştir. Karşılaştırma amacıyla problemin ANSYS® sonlu eleman programında üç boyutlu modeli oluşturulmuştur. Bunun için SOLID185 elemanı kullanılmış; delaminasyonlu yüzeyin modellenmesinde iki farklı yol göz önüne alınmıştır. Bunlardan birincisinde, delaminasyonlu yüzeylerdeki düğüm noktalarının serbest hareketine izin verilmiş; ikinci yolda ise, bu düğüm noktalarının temas elemanları yardımıyla birlikte hareket etmeleri sağlanmıştır. Çeşitli delaminasyon senaryoları için elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görülmüştür.

Anahtar kelimeler: Delaminasyon, tabakalı kompozit, sonlu elemanlar yöntemi, serbest titreşim.

* Corresponding author. Tel.: +90 462-377-4398.

E-mail address: sebahatkaraca@ktu.edu.tr (S. Şimşek).

1. GİRİŞ

Teknoloji ve sanayileşmedeki hızlı gelişme, mukavemeti yüksek, ağırlıkça hafif, korozyona dirençli, ısı özellikleri iyi ve aynı zamanda üretimi kolay malzemeye olan ihtiyacı arttırmıştır. Bu ihtiyaca cevap verebilecek mekanik özelliklere sahip olmaları sebebiyle günümüzde, inşaat, makine, enerji, havacılık, denizcilik ve otomotiv sanayi başta olmak üzere çeşitli alanlarda taşıyıcı yapısal eleman olarak kompozit malzemelerin kullanımı giderek yaygınlaşmaktadır.

Kompozitler çeşitli yüklemeye koşullarına tabi tutulduğunda, tamamen göçme olmadan önce sistemi oluşturan tabakalarda hasarlar meydana gelir. Kompozitte hasarın oluşması yapıya doğrudan zarar vermemekle birlikte, rijitlik ve mukavemeti önemli ölçüde zayıflatır. Yapı elemanlarının yüzeylerinde genelde görülen büyük ölçekteki (makroskobik) çatlaklardan farklı olarak tabakalı kompozitte mikroskobik hasarlar meydana gelmektedir. Bu sebeple, tabakalı kompozitlerin kullanıldığı yapılarda hasar oluşumunun ve meydana getireceği etkilerin doğru anlaşılması son derece önemlidir [1].

Delaminasyon tabakalı kompozitlerde sıklıkla görülen bir hasar tipi olup tabakalar arasında görülen ayrılma olayıdır. Bu tip hasarlar, tek eksenli çekme altındaki kompozit elemanın kenarlarında tabakalar arasında oluşan gerilme yığılmaları sebebiyle meydana gelebilir. Ayrıca, istifleme konfigürasyonuna ve yüklemeye koşullarına bağlı olarak tabakalı kompozit içinde delaminasyon gelişebilir. Ek olarak, darbe etkisi veya yorulma sebebiyle enine çatlak uçlarından delaminasyon başlayabilir [1], [2].

Sonlu elemanlar yöntemi, delaminasyon hasarlarının modellenmesinde sıklıkla başvurulan bir sayısal yöntemdir. Burada en önemli husus, delaminasyon etkilerinin sayısal modelde doğru olarak hesaba katılmadır. Elde edilen sonuçların mühendislik pratiğinde bir anlamının olabilmesi için göz önüne alınan yapısal modelde tabakaların kinematik davranışı ile hasar etkilerinin doğru tanımlanması gerekmektedir [3]. Tabakalı kompozitlerin doğru ve etkin bir şekilde analizi için son elli yılda çeşitli teoriler geliştirilmiştir. Bunlar arasında, eşdeğer tek tabakalı kiriş teorisi [4]–[6], ayrı tabakalı (*layerwise*) kiriş teorisi [6]–[8], Zig-Zag teorisi [9]–[12], üç boyutlu elastisite teorisi [13], [14] sayılabilir. Eşdeğer tek tabakalı kiriş teorisi, ince (narin) kiriş ve plaklarda yer değiştirme, burkulma yükü, titreşim frekansı ve mod şekli gibi global davranışa ait büyüklüklerin hesaplanmasında oldukça iyi sonuç vermektedir. Bununla beraber, kalın (yüksek) kiriş ve plaklarda hasar analizinde gerekli olan lokal gerilme dağılımlarının belirlenmesinde başarısız olmaktadır. Eşdeğer tek tabakalı kiriş teorisinin en büyük dezavantajı, düzlem içi yer değiştirmelerin sürekli olduğunu kabul etmesi ve dolayısıyla yükseklik boyunca kayma gerilmesinin değişimini ihmal etmesidir. Eşdeğer tek tabakalı kiriş teorisinin aksine hem tabaka içi hem de tabakalar arası davranışın temsilinde ayrı tabakalı kiriş teorisi oldukça başarılı sonuç vermektedir. Burada ana fikir, yer değiştirme alanının yükseklik boyunca değişimini göz önüne alarak üç boyutlu problemi iki boyutlu hale indirmektir. Ayrı tabakalı kiriş teorisinin en önemli avantajı, delaminasyon çatlaklarının modellenmesi ve tabakalar arası gerilme dağılımlarının belirlenmesinde büyük fayda ve kolaylık sağlamasıdır.

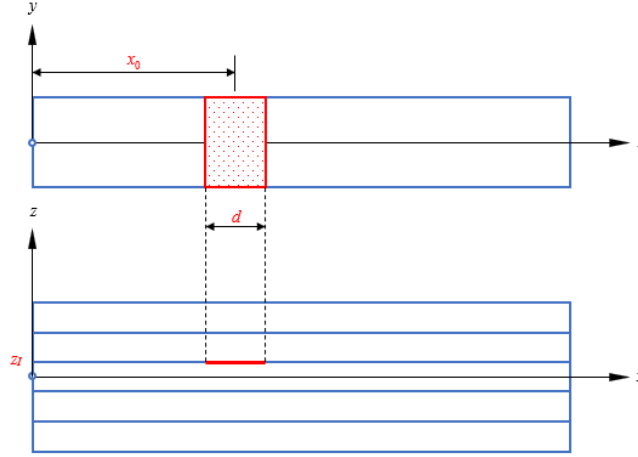
Bu çalışmada, tabakalı kompozit kirişlerin çeşitli delaminasyon senaryoları altında serbest titreşimleri ele alınmıştır. Problemin sonlu eleman modeli, Reddy'nin delaminasyonlu kiriş teorisine dayanmaktadır. Burada, kompozit kirişi oluşturan her tabaka için yer değiştirme alanının doğrusal Lagrange polinomları şeklinde değiştirildiği kabul edilmiş; delaminasyon sebebiyle tabakaların birbiri üzerinden kayması ve tabakaların birbirlerinden ayrılmasını ifade eden terimler hesaba katılmıştır. Hamilton ilkesi kullanılarak hareket denklemleri türetilmiş; buradan da Galerkin yöntemiyle sonlu eleman kütle ve rijitlik matrisleri elde edilmiştir. Karşılaştırma amacıyla problem, ANSYS® sonlu eleman programında da modellenmiştir. Bunun için SOLID185 elemanı kullanılmış; delaminasyonlu yüzeyin modellenmesinde iki farklı yol göz önüne alınmıştır. Bunlardan birincisinde, delaminasyonlu yüzeylerdeki düğüm noktalarının serbest hareketine izin verilmiş; ikinci yolda ise, bu düğüm noktalarının temas elemanları yardımıyla birlikte hareket etmeleri sağlanmıştır. Çeşitli delaminasyon senaryoları için elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

2. REDDY'NİN DELAMİNASYONLU KİRİŞ TEORİSİ

2.1. Yer Değiştirme Alanı, Kinematik Bağıntılar ve Bünye Denklemleri

Şekil 1'de N tabakalı ve delaminasyonu olan bir kirişin temsili gösterimi verilmiştir. Delaminasyon parametreleri x_0 , z_l ve d olup sırasıyla, delaminasyonun orta noktasının orijine uzaklığı, delaminasyonun bulunduğu ara yüzeyi ve delaminasyon uzunluğunu göstermektedir. Reddy'nin teorisine göre, kirişin yer değiştirme alanı aşağıdaki gibidir [15]:

$$\begin{aligned} u(x, t, z) &= u^{LWT}(x, t, z) + u^{DEL}(x, t, z) \\ v(x, t, z) &= 0 \\ w(x, t, z) &= w^{LWT}(x, t, z) + w^{DEL}(x, t, z) \end{aligned} \quad (1)$$



Şekil 1. Delaminasyonlu kirişin temsili gösterimi

Burada u^{LWT} ve w^{LWT} kiriş yer değiştirmesinin x ve z bileşenlerini, u^{DEL} ve w^{DEL} delaminasyonlu ara yüzeyde tabakaların birbirleri üzerinde kaymasını ve birbirlerinden ayrılmasını ifade eden yer değiştirme bileşenlerini ifade etmekte olup aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$u^{LWT}(x, z) = \sum_{l=1}^N U_l(x) \Phi^l(z), \quad w^{LWT}(x, z) = \sum_{l=1}^N W_l(x) \Phi^l(z), \quad (2)$$

$$u^{DEL}(x, t, z) = \sum_{l=1}^{ND} {}^D U_l(x, t) H^l(z), \quad w^{DEL}(x, t, z) = \sum_{l=1}^{ND} {}^D W_l(x, t) H^l(z)$$

Burada ND delaminasyon sayısıdır. Delaminasyon ile ilgili terimlerde görülen $H^l(z)$, Heaviside birim adım fonksiyonu olup

$$H^l(z) = \hat{H}^l(z - z_i) = \begin{cases} 1 & z \geq z_i \\ 0 & z < z_i \end{cases} \quad (3)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada, z_i delaminasyonlu ara yüzeyin koordinatını, ${}^D U_l$ ve ${}^D W_l$ ise tabakaların delaminasyon sebebiyle birbirleri üzerinden kaymasını ve birbirlerinden ayrılmasını ifade eden değişkenleri göstermektedir.

(1) ve (2) ifadeleri göz önüne alınarak şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{l=1}^N \frac{dU_l}{dx} \Phi^l + \sum_{l=1}^{ND} \frac{d{}^D U_l}{dx} H^l, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \sum_{l=1}^N W_l \frac{d\Phi^l}{dz} \quad (4)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{l=1}^N U_l \frac{\partial \Phi^l}{\partial z} + \sum_{l=1}^N \frac{\partial W_l}{\partial x} \Phi^l + \sum_{l=1}^{ND} \frac{\partial {}^D W_l}{\partial x} H^l$$

Kirişte, $\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$ olmakla birlikte Poisson etkisi sebebiyle ε_y , γ_{xy} ve γ_{yz} şekil değiştirme bileşenleri sıfır değildir. Buna göre bünye denklemleri, gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{13} & 0 \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k \quad (5)$$

şeklinde elde edilir. Burada \tilde{C}_{ij}^k , k . ortotropik tabaka için dönüştürülmüş malzeme sabitlerini göstermektedir [16].

2.2. Hareket Denklemleri

Tabakalı kompozit kirişte hareket denklemlerini elde etmek için

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\delta T - (\delta U + \delta V)\} dt = 0 \quad (6)$$

ile verilen Hamilton ilkesi kullanılmıştır. Burada δT virtüel kinetik enerjiyi, δU virtüel şekil değiştirme enerjisini ve δV ise dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işi göstermektedir [15]. Bu çalışmada sadece serbest titreşim problemi ele alındığından δV terimi sıfır olacaktır. Enerji ifadeleri (6) denkleminde yazılıp, gerekli işlemler yapılırsa hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilirler [15]:

$$\delta U_I : \quad \frac{\partial N_{xx}^I}{\partial x} - Q_x^I = \sum_{J=1}^N I_1^U \ddot{U}_J + \sum_{J=1}^{ND} I_3^U {}^D \ddot{U}_J \quad (7)$$

$$\delta W_I : \quad \frac{\partial \tilde{Q}_x^I}{\partial x} - Q_z^I = \sum_{J=1}^N I_1^U \ddot{W}_J + \sum_{J=1}^{ND} I_3^U {}^D \ddot{W}_J \quad (8)$$

$$\delta {}^D U_I : \quad \frac{\partial {}^D N_{xx}^I}{\partial x} = \sum_{J=1}^N I_2^U \ddot{U}_J + \sum_{J=1}^{ND} I_4^U {}^D \ddot{U}_J \quad (9)$$

$$\delta {}^D W_I : \quad \frac{\partial {}^D Q_x^I}{\partial x} = \sum_{J=1}^N I_2^U \ddot{W}_J + \sum_{J=1}^{ND} I_4^U {}^D \ddot{W}_J \quad (10)$$

Bu ifadelerde görülen terimlerin tanımları sayfa kısıtlaması sebebiyle verilmemiş olup, ilgili ifadeler Reddy [15] ve Na [17]'da bulunabilir.

2.3. Sonlu Eleman Formülasyonu

Çalışmada göz önüne alınan sonlu eleman modeli için yer değiştirmeler aşağıdaki gibi kabul edilmektedir:

$$U_I(x) = \sum_{j=1}^2 U_I^j \varphi_j(x), \quad W_I(x) = \sum_{j=1}^2 W_I^j \varphi_j(x), \quad {}^D U_I(x) = \sum_{j=1}^2 {}^D U_I^j \varphi_j(x), \quad {}^D W_I(x) = \sum_{j=1}^2 {}^D W_I^j \varphi_j(x) \quad (11)$$

Burada, U_I , W_I , ${}^D U_I$ ve ${}^D W_I$ genelleştirilmiş koordinatları, φ_i ise lineer Lagrange polinomlarını göstermektedir. (11) verilen yer değiştirme ifadeleri, (7)-(10) hareket denklemlerinde yerine koyulur ve Galerkin yöntemi kullanılırsa sonlu eleman hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{U}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{0} \quad (12)$$

Burada, \mathbf{M}^e ve \mathbf{K}^e sırasıyla eleman kütle ve rijitlik matrislerini, \mathbf{U}^e düğüm noktaları yer değiştirme vektörünü ve $\ddot{\mathbf{U}}^e$ ivme vektörünü göstermekte olup aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^U & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{13}^U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22}^U & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{24}^U \\ \mathbf{M}_{31}^U & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{33}^U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{42}^U & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{44}^U \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^U & \mathbf{K}_{12}^U & \mathbf{K}_{13}^U & \mathbf{K}_{14}^U \\ \mathbf{K}_{21}^U & \mathbf{K}_{22}^U & \mathbf{K}_{23}^U & \mathbf{K}_{24}^U \\ \mathbf{K}_{31}^U & \mathbf{K}_{32}^U & \mathbf{K}_{33}^U & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{41}^U & \mathbf{K}_{42}^U & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{44}^U \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{U}}^e = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}^J \\ \ddot{\mathbf{W}}^J \\ {}^D \ddot{\mathbf{U}}^J \\ {}^D \ddot{\mathbf{W}}^J \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^J \\ \mathbf{W}^J \\ {}^D \mathbf{U}^J \\ {}^D \mathbf{W}^J \end{bmatrix} \quad (13)$$

Burada, kütle ve rijitlik matrisinin elemanları aşağıdaki integraller yardımıyla elde edilirler:

$$M_{11ij}^U = M_{22ij}^U = \int_0^L \{I_1^U \varphi_i \varphi_j\} dx, \quad M_{13ij}^U = M_{24ij}^U = \int_0^L \{I_3^U \varphi_i \varphi_j\} dx, \quad (14)$$

$$M_{31ij}^U = M_{42ij}^U = \int_0^L \{I_2^U \varphi_i \varphi_j\} dx, \quad M_{33ij}^U = M_{44ij}^U = \int_0^L \{I_4^U \varphi_i \varphi_j\} dx$$

$$K_{11ij}^U = \int_0^L \left\{ A_{11}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \bar{A}_{55}^U \varphi_i \varphi_j \right\} dx, \quad K_{12ij}^U = \int_0^L \left\{ \tilde{A}_{13}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j + \bar{B}_{55}^U \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right\} dx,$$

$$K_{13ij}^U = \int_0^L \left\{ {}^D A_{11}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right\} dx, \quad K_{14ij}^U = \int_0^L \left\{ {}^D \bar{B}_{55}^U \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right\} dx, \quad (15)$$

$$K_{21ij}^U = \int_0^L \left\{ \bar{B}_{55}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j + \tilde{A}_{31}^U \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right\} dx, \quad K_{22ij}^U = \int_0^L \left\{ \bar{D}_{55}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \hat{A}_{33}^U \varphi_i \varphi_j \right\} dx,$$

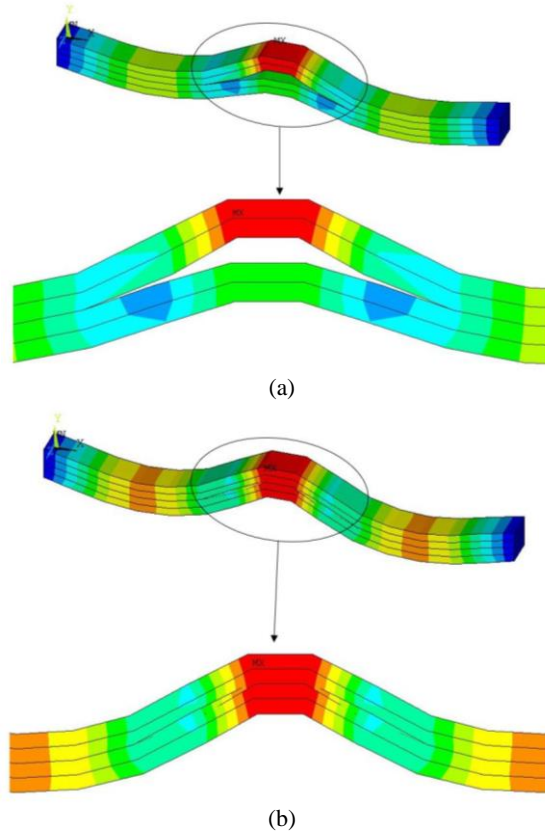
$$\begin{aligned} K_{23ij}^U &= \int_0^L \left\{ {}^D \bar{A}_{31}^U \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right\} dx, & K_{24ij}^U &= \int_0^L \left\{ {}^D \bar{A}_{55}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right\} dx, & K_{31ij}^U &= \int_0^L \left\{ {}^D \bar{A}_{11}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right\} dx, \\ K_{32ij}^U &= \int_0^L \left\{ {}^D \bar{A}_{13}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j \right\} dx, & K_{33ij}^U &= \int_0^L \left\{ {}^D \bar{A}_{11}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right\} dx, & K_{41ij}^U &= \int_0^L \left\{ {}^D \bar{B}_{55}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j \right\} dx, \\ K_{42ij}^U &= \int_0^L \left\{ {}^D \bar{A}_{55}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right\} dx, & K_{44ij}^U &= \int_0^L \left\{ {}^D \bar{A}_{55}^U \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right\} dx \end{aligned} \quad (15 \text{ devamı})$$

Bu ifadelerdeki A , B ve D terimleri rijitlik ile ilgili terimlerdir [17].

3. DELAMİNASYONLU KİRİŞİN ANSYS® PROGRAMIYLA MODELLENMESİ

Yukarıda formülasyonu verilen kiriş teorisinin sonuçlarıyla karşılaştırma yapmak amacıyla delaminasyonlu kompozit kirişin üç boyutlu sonlu eleman modeli ANSYS® 16.0 programında oluşturulmuştur. Modellemede SOLID185 tabakalı katı elemanı, kiriş yüksekliği boyunca her tabaka için bir eleman olacak şekilde kullanılmıştır. Tabaka bilgisi, SHELL SECTION kullanılarak tanımlanmıştır. Delaminasyonlu kiriş modelinde kullanılacak optimum eleman sayısını belirlemek üzere ağ yakınsama çalışması yapılmış ve uygun ağ sıklığına karar verilmiştir. Sayısal analizlerde göz önüne alınan tabakalı kompozit kiriş modellerinde 1752 eleman ve 1664 düğüm noktası kullanılmıştır.

ANSYS® programında yapılan modellemede, delaminasyonsuz yüzeyler boyunca konumlanan düğüm noktalarının birlikte hareketi sağlanmış, ayrılma bölgesindeki düğüm noktalarının ise birbirlerinden bağımsız hareketine izin verilmiştir. Delaminasyonun modellenmesinde iki farklı yol dikkate alınmıştır. Birinci yolda, ayrılma yüzeyindeki düğüm noktaları birbirlerinden bağımsız olarak hareket ettikleri düşünülmüştür. Bu durumda titreşim esnasında tabakaların birbirleri içerisinde geçmesi ve farklı yönlerde birbirlerinden uzaklaşması söz konusu olabilmektedir (bkz. Şekil 2(a)). Delaminasyon davranışının daha gerçekçi temsil edilebilmesi için dikkate alınan ikinci yolda ise ayrılma yüzeylerine TARGE170/CONTAC173 temas elemanları atanmıştır. Böylece, yer değiştirme sırasında tabakaların iç içe geçmesini önlemek için yüzeylerde normal (basınç) gerilmelerin aktarılmasına izin verilmiştir; ayrılma sırasında ise normal gerilmelerin sıfır olması sağlanmıştır (bkz. Şekil 2(b)).



Şekil 2. Delaminasyonlu kirişin ANSYS® programında oluşturulan sonlu eleman modeli (a) temas elemanı kullanılmamış ve (b) temas elemanı kullanılmış

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Çeşitli delaminasyon senaryoları için tabakalı kompozit kirişin doğal frekansları ve mod şekillerine ait sayısal sonuçlar sunulmuştur. Sayısal analizlerde göz önüne alınmış $[0/90]_2$ tabaka dizilimine sahip olup iki ucunda ankastredir. Tabakaların eşit yükseklikte olduğu kabul edilmiştir. Bir tabaka için malzeme özellikleri: $E_1 = 144.9$ GPa, $E_2 = 9.65$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 4.14$ GPa, $G_{23} = 3.45$ GPa, $\nu = 0.3$ ve $\rho = 1389,23$ kg/m³ olarak dikkate alınmıştır. Kiriş boyutları: $L/h = 15$, $b = h = 1$ birim olarak hesaba katılmıştır.

Tablo 1’de göz önüne alınan delaminasyon senaryoları görülmektedir. Tüm hasar senaryolarında tek delaminasyon olup kirişin ortasında yer almaktadır. Delaminasyonun farklı tabakalarda ve uzunluklarda olması durumunda doğal frekans ve mod şekillerindeki değişim incelenmiştir. İlk üç senaryoda, delaminasyon uzunluğu $L / 5$ olup, delaminasyonun aşağıdan yukarı doğru sırayla her bir ara yüzeyde yer alması durumu dikkate alınmıştır. Son üç senaryoda ise delaminasyonun uzunluğu arttırılmış ($L / 3$) ve yine sırayla her bir ara yüzeyde yer alması durumu göz önüne alınmıştır.

Sayısal sonuçlar, FORTRAN dilinde yazılan bir program yardımıyla elde edilmiş ve ANSYS® üç boyutlu modelleme sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalı sonuçların verildiği aşağıdaki tablolarda, ANSYS® sonuçları sadece delaminasyonlu yüzeylerde temas elemanlarının kullanıldığı durum için verilmiştir. Temas elemanlarının kullanılmadığı durumda doğal frekanslarda bir değişiklik olmamakta, sadece mod şekillerinde tabakaların iç içe geçmesi veya birbirlerinde uzaklaşarak açılması olayı meydana gelmektedir. Göz önüne alınan hasar senaryoları için çalışmada formülasyonu verilen Reddy’nin teorisine dayalı sonuç eleman ile ANSYS® programından elde edilen ilk dört doğal frekans (Hz) Tablo 2’de verilmiştir. Görüleceği üzere, delaminasyonun uzunluğunun artması frekansların azalmasına sebep olmaktadır. Çalışmada sunulan teori ile ANSYS® programından elde edilen sonuçların – yüksek modlarda iki teori arasındaki farkın bir miktar artmasına rağmen – birbirleriyle uyumlu oldukları görülmektedir. Bu durum, göz önüne alınan teorisinin üç boyutlu problemi başarıyla ve kolayca temsil edebildiğini göstermektedir.

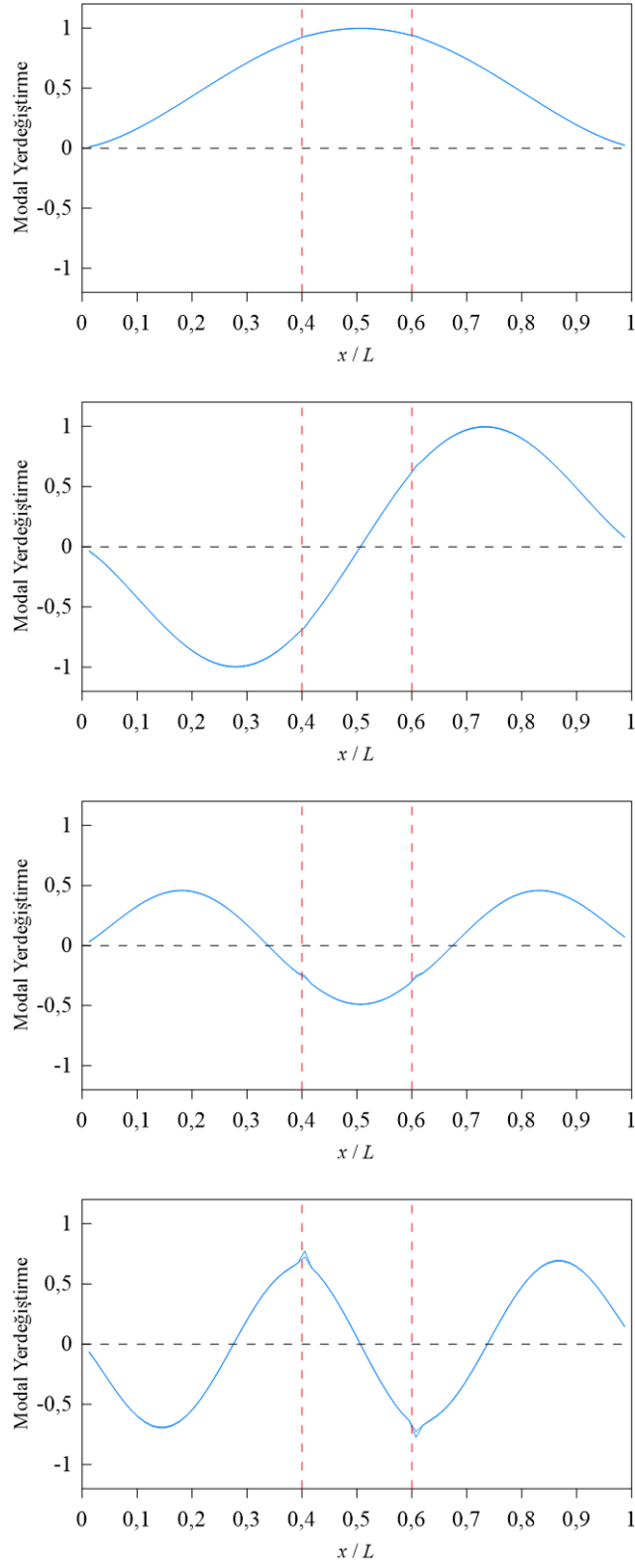
Şekil 3 ve 4’te, göz önüne alınan kirişin önerilen yöntem ve ANSYS® programından elde edilen ilk dört eğilme modu şekilleri verilmiştir. Şekil 3’ten açıkça görüleceği üzere, delaminasyonun başlangıç ve bitiş noktalarında mod şekil eğrilerinde kırıklıklar bulunmaktadır. Şekil 4’teki ANSYS® sonuçlarına bakıldığında ise, titreşim sırasında tabakalar arasında delaminasyon sebebiyle meydana gelen kayma net olarak görülmekte; açılma ise temas elemanlarının varlığı sebebiyle sadece 4. modda net olarak gözlemlenebilmektedir.

Tablo 1. Analizlerde göz önüne alınan delaminasyon durumları

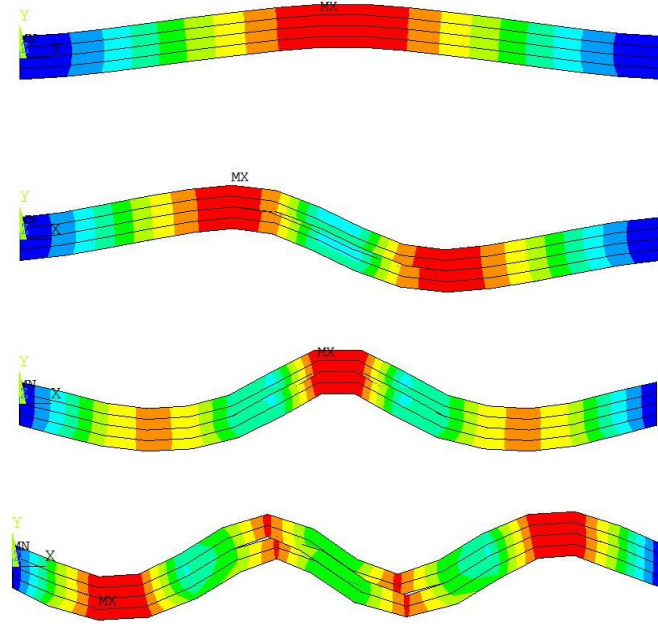
Hasar senaryosu	Delaminasyonu tanımlayan değişkenler (bkz. Şekil 1)		
	Ara yüzey, z_i	Uzunluk, d	Orta nokta, x_0
S1	1	$L / 5$	$L / 2$
S2	2	$L / 5$	$L / 2$
S3	3	$L / 5$	$L / 2$
S4	1	$L / 3$	$L / 2$
S5	2	$L / 3$	$L / 2$
S6	3	$L / 3$	$L / 2$

Tablo 2. Göz önüne alınan hasar senaryoları için Reddy’nin teorisinden ve ANSYS® programından elde edilen ilk dört doğal frekans (Hz)

Hasar senaryosu	f_1		f_2		f_3		f_4	
	Reddy	ANSYS®	Reddy	ANSYS®	Reddy	ANSYS®	Reddy	ANSYS®
S1	2633,67	2667,07	5430,13	6366,64	10399,47	11019,80	12929,54	16151,90
S2	2632,64	2663,77	5409,83	5587,51	10342,91	10869,89	12914,37	13782,94
S3	2623,31	2663,76	6213,01	5595,65	11185,41	10869,93	14814,82	13785,87
S4	2579,53	2666,09	4542,21	6319,76	9005,38	10987,01	12460,03	15864,43
S5	2573,47	2617,85	4518,34	4651,17	9002,69	9559,01	12455,67	13295,84
S6	2308,58	2618,57	5911,20	4668,30	11015,27	9571,07	15670,04	13299,48



Şekil 3. İki ucu ankastre tabakalı kompozit kirişin Reddy'nin teorisine dayalı sonlu eleman modeli için elde edilen ilk dört mod şekli (S2)



Şekil 4. İki ucu ankastre tabakalı kompozit kirişin ANSYS® programından elde edilen ilk dört mod şekli (S2)

5. SONUÇLAR

Tabakalı kompozit kirişlerin çeşitli delaminasyon senaryoları altında serbest titreşimleri ele alınmıştır. Problemin sonlu eleman modeli için Reddy'nin delaminasyonlu kiriş teorisi göz önüne alınmıştır. Buna göre, kompozit kirişi oluşturan her tabaka için yer değiştirme alanının doğrusal Lagrange polinomları şeklinde değiştiği kabul edilmiş; delaminasyon sebebiyle tabakaların birbiri üzerinden kayması ve tabakaların birbirlerinden ayrılmasını ifade eden terimler hesaba katılmıştır. Çözümde Poisson etkisi dikkate alınmıştır. Hareket denklemleri, Hamilton ilkesi kullanılarak türetilmiş; ardından Galerkin yöntemiyle sonlu eleman matrisleri elde edilmiştir. Sonuçların test edilmesi için problem, ANSYS® sonlu eleman programında modellenmiştir. Bunun için SOLID185 elemanı kullanılmış; delaminasyonlu yüzeyin modellenmesinde iki farklı yol göz önüne alınmıştır. Bunlardan birincisinde, delaminasyonlu yüzeylerdeki düğüm noktalarının serbest hareketine izin verilmiş; ikinci yolda ise, bu düğüm noktalarının temas elemanları yardımıyla birlikte hareket etmeleri sağlanmıştır. Çalışmadan elde edilen sayısal sonuçlara göre;

- Delaminasyon uzunluğunun artması doğal frekansları azaltmaktadır.
- Reddy'nin teorisine dayalı sonlu eleman modeli yardımıyla üç boyutlu problem başarıyla iki boyutlu hale indirgenebilmekte ve oldukça doğru sonuçlar elde edilebilmektedir.

Bu çalışmada ele alınan teori, ileride yapılacak titreşime dayalı hasar tespiti çalışmaları için son derece esnek bir modelleme imkânı sunmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] A. Ghobadi, "Common Type of Damages in Composites and Their Inspections," *World J. Mech.*, vol. 07, no. 02, pp. 24–33, 2017, doi: 10.4236/wjm.2017.72003.
- [2] K. Torabi, M. Shariati-Nia, and M. Heidari-Rarani, "Experimental and theoretical investigation on transverse vibration of delaminated cross-ply composite beams," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 115–116, pp. 1–11, 2016, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2016.05.023.
- [3] C. N. Della and D. Shu, "Vibration of Delaminated Composite Laminates: A Review," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 60, no. 1, p. 1, 2007, doi: 10.1115/1.2375141.
- [4] V. K. Goyal and R. K. Kapania, "A shear-deformable beam element for the analysis of laminated composites," *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 43, no. 6–7, pp. 463–477, 2007, doi: 10.1016/j.finel.2006.11.011.

- [5] R. M. Aguiar, F. Moleiro, and C. M. Mota Soares, "Assessment of mixed and displacement-based models for static analysis of composite beams of different cross-sections," *Compos. Struct.*, vol. 94, no. 2, pp. 601–616, 2012, doi: 10.1016/j.compstruct.2011.08.028.
- [6] A. S. Sayyad and Y. M. Ghugal, "Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature," *Compos. Struct.*, vol. 171, pp. 486–504, 2017, doi: 10.1016/j.compstruct.2017.03.053.
- [7] M. Hajianmaleki and M. S. Qatu, "Vibrations of straight and curved composite beams: A review," *Compos. Struct.*, vol. 100, pp. 218–232, 2013, doi: 10.1016/j.compstruct.2013.01.001.
- [8] D. Li, "Layerwise Theories of Laminated Composite Structures and Their Applications: A Review," *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 1, no. 0123456789, p. 3, Jan. 2020, doi: 10.1007/s11831-019-09392-2.
- [9] E. Lansing and E. Lansing, "C0 zig-zag finite element for analysis of laminated composite beams," *J. Eng. Mech.*, vol. 125, no. 3, pp. 323–330, 1999.
- [10] W. Zhen and C. Wanji, "An assessment of several displacement-based theories for the vibration and stability analysis of laminated composite and sandwich beams," *Compos. Struct.*, vol. 84, no. 4, pp. 337–349, 2008, doi: 10.1016/j.compstruct.2007.10.005.
- [11] A. A. Khan, M. Naushad Alam, and M. Wajid, "Finite element modelling for static and free vibration response of functionally graded beam," *Lat. Am. J. Solids Struct.*, vol. 13, no. 4, pp. 690–714, 2016.
- [12] M. Filippi and E. Carrera, "Bending and vibrations analyses of laminated beams by using a zig-zag-layer-wise theory," *Compos. Part B Eng.*, vol. 98, pp. 269–280, 2016, doi: 10.1016/j.compositesb.2016.04.050.
- [13] W. Q. Chen, C. F. Lv, and Z. G. Bian, "Elasticity solution for free vibration of laminated beams," *Compos. Struct.*, vol. 62, no. 1, pp. 75–82, 2003, doi: 10.1016/S0263-8223(03)00086-2.
- [14] T. Kant, A. B. Gupta, S. S. Pendhari, and Y. M. Desai, "Elasticity solution for cross-ply composite and sandwich laminates," *Compos. Struct.*, vol. 83, no. 1, pp. 13–24, 2008, doi: 10.1016/j.compstruct.2007.03.003.
- [15] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Ed. Boca Raton: CRC Press/Balkema, 2003.
- [16] T. P. Vo, H. T. Thai, and M. Aydogdu, "Free vibration of axially loaded composite beams using a four-unknown shear and normal deformation theory," *Compos. Struct.*, vol. 178, pp. 406–414, 2017, doi: 10.1016/j.compstruct.2017.07.022.
- [17] W. J. Na, "Damage analysis of laminated composite beams under bending loads using the layer-wise theory," Texas A&M University, 2008.